香港中文大學數學系
數學建模計劃團隊

mathmodel@math.cuhk.edu.hk

練習(坐標平面與距離公式)

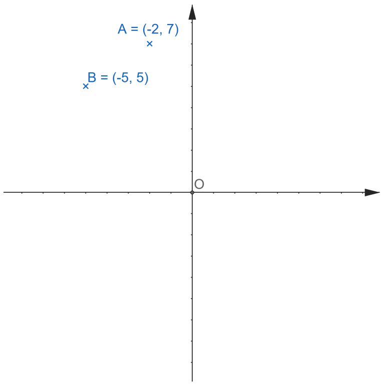
最後更新：2026年3月30日

部分A: 基本問題

1. 在圖中，點A 及B 的坐標分別為$(-2,7)$ 及$(-5,5)$。A 繞原點O 順時針方向旋轉90° 至A'。B' 是B 於y 軸的反射影像。

   (a) 寫出A' 及B' 的坐標。

   (b) AB 與$A'B'$ 的長度是否相等？試解釋你的答案。



2. 點P 及Q 的坐標分別為$(-3,5)$ 及$(2,-7)$。P 繞原點O 逆時針方向旋轉270° 至P'。Q 向左平移21 個單位至Q'。

   (a) 寫出P' 及Q' 的坐標。

   (b) 證明PQ 垂直於$P'Q'$。

3. 點P 的直角坐標為$(-1,\sqrt{3})$。若將點P 沿x 軸進行反射，求其圖像的極坐標影像。

4. 點P 向左平移4 個單位至點Q。若Q 於y 軸的反射影像的坐標為$(5,-1)$，求P 的極坐標。

5. 若d 為點(a,b) 與點(b,a) 之間的距離，試以a 及b 表示d^2。

6. 若$(-2,3)$ 為$(a,-1)$ 與$(4,b)$ 的中點，求b 的值。

部分B: 進階問題

7. 若P 為點$(x,0)$，Q 為點$(0,1)$，R 為點$(0,x)$，且$PQ=2RQ$，找出一個以x 為根的一元二次多項式。

8. $A(-3,2)$ 及$B(1,3)$ 為兩點。C 在AB 的延長線上，並使$AB:BC=1:2$。求C 的坐標。

9. 若點$(0,0)$、$(2,0)$ 及$(1,b)$ 為一等邊三角形的頂點，求b 的值。

10. 點A 的坐標為$(-5,-2)$。若將A 向右平移9 個單位至點B，再將點B 繞原點逆時針方向旋轉90° 至點C。求C 的y 坐標。

11. 若$\triangle ABC$ 為一鈍角三角形，下列各點中哪些必定在$\triangle ABC$ 的外部？

    (a) $\triangle ABC$ 的形心

    (b) $\triangle ABC$ 的外心

    (c) $\triangle ABC$ 的垂心

12. 設O 為原點。點P 及點Q 的坐標分別為$(p,0)$ 及$(0,q)$，其中p 及q 均為正數。若$\triangle OPQ$ 的內心在直線$3x+4y=3p$ 上，求$p:q$ 的值。

解答

1. (a) $A'(7,2)$ 及 $B'(5,5)$。

   (b) 留意 $|AB| = \sqrt{(-2-(-5))^2+(7-5)^2} = \sqrt{13}$ 及 $|A'B'| = \sqrt{(7-5)^2+(2-5)^2} = \sqrt{13}$，故二者的長度相等。

   另外，B' 可視為將 B 繞原點順時針方向旋轉 90° 所得，這亦會得出相同結論。

2. (a) $P'(5,3)$ 及 $Q'(-19,-7)$。

   (b) PQ 的斜率為 $\dfrac{-3-2}{5-(-7)} = \dfrac{-5}{12}$，$P'Q'$ 的斜率為 $\dfrac{5-(-19)}{3-(-7)} = \dfrac{12}{5}$。

   二者的乘積為 -1。故 PQ 與 $P'Q'$ 互相垂直。

3. 影像的直角坐標為 $(-1,-\sqrt{3})$。

   極坐標的第一個分量為 $\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2} = 2$。

   注意第二個分量 θ 滿足 $\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$ 及 $\sin\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，因此 $\theta = 210^\circ$。

   故極坐標為 $(2,210^\circ)$。

4. Q 的坐標為 $(-5,-1)$，而 Q 向右平移 4 個單位即得點 P，其坐標為 $(-1,-1)$。

5. $d = \sqrt{(a-b)^2+(b-a)^2}$，故 $d^2 = 2(a-b)^2$。

6. 我們只需解 $3 = \dfrac{-1+b}{2}$，便可得 $b = 7$。

7. 注意 $|PQ| = \sqrt{1^2+x^2} = \sqrt{1+x^2}$ 及 $|RQ| = |x-1|$。

   我們有 $\sqrt{x^2+1} = 2|x-1|$，兩邊平方，可得 $3x^2-8x+3=0$。

8. AB 的直線方程為 $x-4y+11=0$。

   設 C 的坐標為 $(4c-11,c)$。

   由 $AB:BC = 1:2$，可得 $(c-2):(3-c) = 1:2$，故 $c = \dfrac{7}{3}$。

   C 的坐標為 $(-\dfrac{5}{3},\dfrac{7}{3})$。

9. 注意存在兩個等邊三角形均滿足題意，分別位於 x 軸的上方及下方。

   解 $\sqrt{1^2+b^2} = 2$，可得 $b = \sqrt{3}$ 或 $-\sqrt{3}$。

10. B 的坐標為 $(4,-2)$，C 的坐標為 $(2,4)$。

    因此 C 的 y 坐標為 4。

11. 形心為三條中線的交點，故對所有三角形而言，它必定位於三角形內部。

    因此，對於鈍角三角形，外心及垂心是會位於三角形外部的點。

12. 內心為三角形三條角平分線的交點，因此它位於直線$y = x$ 上。

注意它也在直線$3x + 4y = 3p$ 上，我們可將其寫成$(\frac{3}{7}p, \frac{3}{7}p)$ 的形式。

內心與PQ 的垂直距離亦為$\frac{3}{7}p$，因此，我們有$\frac{|\frac{3}{7}pq + \frac{3}{7}p^2 - pq|}{\sqrt{p^2 + q^2}} = \frac{3}{7}p$。

故$p : q = 7 : 24$。