

甲部：核心概念

1. 微分方程(Differential Equations)

微分方程是含有未知函數導數的方程。微分方程的階數(order)是方程中最高階導數的階數。

例子：

微分方程	階數	未知函數
$\frac{dy}{dx} = 4y$	1	$y(x)$
$y'' + 2y = 2x$	2	$y(x)$
$\frac{d^3y}{dt^3} - t\frac{dy}{dt} + t(y-1) = e^t$	3	$y(t)$

例子：

(a) $y' = x$ 。

求解 $y' = x$ ，我們對 x 積分一次，

$$y = \int x dx = \frac{1}{2}x^2 + C,$$

其中 $C \in \mathbb{R}$ 。這稱為**通解(general solution)**。

若將積分常數 C 取為特定數值，例如 $C = 3$ ，則 $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$ 是該微分方程的一個**特解(particular solution)**。

(b) 微分方程的通解包含一個任意常數。要確定唯一解，需要給定一些條件。例如，考慮

$$\begin{cases} y' = x, \\ y(0) = 3. \end{cases}$$

通解為 $y = \frac{1}{2}x^2 + C$ 。利用**初始條件** $y(0) = 3$ ，得 $C = 3$ 。這類問題稱為**初值問題(initial condition problem)**。

2. 可分離方程(Separable Equation)

以下形式的方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}$$

稱為**可分離**方程。

為求解上述方程，我們將其改寫為

$$h(y) \frac{dy}{dx} = g(x)$$

對 x 積分，

$$\begin{aligned} \int h(y) dy &= \int g(x) dx, \\ H(y) &= G(x) + C, \end{aligned}$$

從而確定 y 關於 x 的函數（關係）。

更簡便的寫法是

$$h(y)dy = g(x)dx,$$

而「可分離」之名正是指變量 x 和 y 被分離到兩側。

例子：求解微分方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x^3}{y^2}.$$

再解初值問題

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{2x^3}{y^2}, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

解答：方程改寫為

$$y^2 dy = 2x^3 dx.$$

兩邊積分，

$$\int y^2 dy = \int 2x^3 dx,$$

故通解為

$$\frac{1}{3}y^3 = \frac{1}{2}x^4 + C.$$

將初始條件 $y(0) = 1$ 代入通解，得 $C = \frac{1}{3}$ 。因此，初值問題的解為

$$\frac{1}{3}y^3 = \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}.$$

3. 一階線性微分方程(First-Order Linear Differential Equation)

以下形式的方程

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

稱為一階線性微分方程。

若 $p(x) = 0$ ，積分方程 $\frac{dy}{dx} = q(x)$ 得

$$y = \int q(x)dx.$$

若 $p(x) \neq 0$ ，將方程乘以某個函數 $\mu = \mu(x)$ ，得

$$\mu \frac{dy}{dx} + \mu p(x)y = \mu q(x). \quad (1)$$

只要 μ 滿足

$$\frac{d\mu}{dx} = \mu p(x),$$

則左側恰為 μy 的導數，即

$$\mu \frac{dy}{dx} + \mu p(x)y = \frac{d}{dx}(\mu y) = \mu \frac{dy}{dx} + \frac{d\mu}{dx}y.$$

而 μ 滿足的方程是可分離的，其通解為

$$\mu = e^{\int p(x)dx + \tilde{C}}. \quad (2)$$

(註： μ 稱為積分因子(*integrating factor*)，在推導原一階微分方程的通解中扮演重要角色，如下所示。可以證明，這裡的常數 \tilde{C} 不會影響原微分方程的最終通解。因此，通常直接設 $\tilde{C} = 0$ ，取 $\mu = e^{\int p(x)dx}$ 。)

回到(1)，我們有

$$\frac{d}{dx}(\mu y) = \mu q(x)$$

故

$$\mu y = \int \mu q(x)dx + C$$

$$y = \frac{1}{\mu} \left(\int \mu q(x) dx + C \right) \quad (3)$$

例子：求解

$$\frac{dy}{dx} - y = e^{3x}.$$

解答：這是一階線性方程，其中 $p(x) = -1$ ， $q(x) = e^{3x}$ 。令

$$\mu = e^{\int p(x) dx} = e^{-x}.$$

(注意：本應為 e^{-x+C} ，但我們選取 $C = 0$ 。)

將方程乘以 μ ，得

$$\frac{d}{dx}(e^{-x}y) = e^{-x}e^{3x} = e^{2x}.$$

所以

$$e^{-x}y = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2}e^{2x} + C$$

(注意：此 C 不可省略。)

因此，通解為

$$y = e^x \left(\frac{1}{2}e^{2x} + C \right).$$

4. 常係數二階微分方程 (Second-Order Differential Equations with Constant Coefficients)

我們考慮以下常係數二階微分方程

$$ay'' + by' + cy = 0,$$

其中 a, b, c 為常數，且 $a \neq 0$ 。

嘗試指數函數 $y = e^{rx}$ ，則 $y' = re^{rx}$ ， $y'' = r^2e^{rx}$ 。代入方程，得

$$(ar^2 + br + c)e^{rx} = 0.$$

由於 $e^{rx} \neq 0$ ，故有

$$ar^2 + br + c = 0,$$

稱為該微分方程的**特徵方程**。根據判別式 $\Delta = b^2 - 4ac$ 的不同，特徵方程的根有三種情況。

情況 I： $b^2 - 4ac > 0$ 。

有兩個相異實根 $r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ， $r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ 。可以驗證 $y = e^{r_1x}$ 和 $y = e^{r_2x}$ 均滿足給定的微分方程。因此，通解為

$$y = C_1 e^{r_1x} + C_2 e^{r_2x}.$$

例子：求 $y'' - y' - 6y = 0$ 的通解。解。特徵方程為

$$r^2 - r - 6 = 0.$$

根為 $r_1 = 3$ 和 $r_2 = -2$ 。故通解為

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-2x}.$$

情況 II： $b^2 - 4ac = 0$ 。

有一個重實根 $r = -\frac{b}{2a}$ 。我們有一個解 $y_1 = e^{rx}$ ，且可驗證 $y_2 = xe^{rx}$ 是另一個解。因此，通解為

$$y = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx}.$$

情況 III： $b^2 - 4ac < 0$

由於推導涉及複數，這裡直接給出通解：

$$y = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x,$$

其中 $\alpha = -\frac{b}{2a}$, $\beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$ 。

例子：求 $y'' - 4y' + 5y = 0$ 的通解。解答：特徵方程為

$$r^2 - 4r + 5 = 0.$$

$\alpha = 2$, $\beta = 1$, 得通解

$$y = C_1 e^{2x} \cos x + C_2 e^{2x} \sin x.$$

$ay'' + by' + cy = 0$ 的通解總結：

判別式	根的性質	通解
$b^2 - 4ac > 0$	$r_1 \neq r_2$, 實數	$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
$b^2 - 4ac = 0$	$r_1 = r_2$, 實數	$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 x e^{r_1 x}$
$b^2 - 4ac < 0$	$r_1 = \alpha + i\beta, r_2 = \alpha - i\beta$, 複數	$y = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x$

乙部：基礎問題

1. 求解下列可分離常微分方程。

(a) $\frac{dy}{dx} = -4x^2y^3$;

(b) $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + 1}{xy}$, 其中 $y(1) = 3$;

(c) $\frac{dy}{dx} = xe^{y-x^2}$, 其中 $y(1) = 0$ 。

2. 求解下列一階線性常微分方程。

(a) $y' + y = xe^{-x} + 1$;

(b) $ty' + 2y = 2 \sin t$, $y(\frac{\pi}{2}) = 1$, $t > 0$ 。

3. 求初值問題的解

$$2y'' - 3y' + y = 0, y(0) = 2, y'(0) = \frac{1}{2}.$$

丙部：進階問題

4. (重力與空氣阻力下的運動) 考慮一質量 $m = 0.5$ 公斤的球，初速度 $v_0 = 9.8$ 米/秒。設 $v(t)$ 為 t 時刻的速度，重力加速度 $g = 9.8$ 米/秒²，空氣阻力為 $-\frac{v}{2}$ 。求速度 $v(t)$ 的表達式。
5. 一個1000 升的容器最初裝滿濃度為30 克/升的糖溶液。另一濃度為5 克/升的糖溶液以10 升/分鐘的速率流入容器，同時充分混合的溶液以15 升/分鐘的速率流出容器。

- (a) 在何時容器內溶液體積變為一半？
(b) 當容器半滿時，容器內含有多少克糖？

6. 考慮一階線性微分方程

$$P(x)y' + Q(x)y = 0,$$

其中 $P(x)$ 、 $Q(x)$ 為給定函數。證明：若 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是上述方程的兩個解，則對任意常數 c_1 、 c_2 ，函數

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

也是該方程的解。

7. 考慮二階線性方程

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0.$$

其中 $P(x)$ 、 $Q(x)$ 、 $R(x)$ 為給定函數。證明：若 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是上述方程的兩個解，則對任意常數 c_1 、 c_2 ，函數

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

也是該方程的解。

8. 一個自由振動由

$$\begin{cases} y''(t) + 4y = 0, \\ y(0) = 1, y'(0) = 4, \end{cases}$$

描述，其中 $y(t)$ 為 t 時刻的位置。求該振動的週期和頻率。

丁部：解答

1. (a) 若 $y = 0$ ，易見微分方程成立。

若 $y \neq 0$ ，則有

$$\frac{1}{y^3} dy = -4x^2 dx$$

兩邊積分，得

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{y^3} dy &= \int -4x^2 dx \\ \frac{1}{-2y^2} &= \frac{-4x^3}{3} + C \\ \frac{1}{y^2} &= \frac{8x^3 + C}{3} \\ y &= \pm \sqrt{\frac{3}{8x^3 + C}}\end{aligned}$$

因此，解為 $y = 0$ 或 $y = \pm \sqrt{\frac{3}{8x^3 + C}}$ ，其中 C 為常數。

(b) 由給定微分方程，得

$$\frac{y}{y^2 + 1} dy = \frac{1}{x} dx$$

兩邊積分，得

$$\begin{aligned}\int \frac{y}{y^2 + 1} dy &= \int \frac{1}{x} dx \\ \int \frac{1}{2} \cdot \frac{2y}{y^2 + 1} dy &= \int \frac{1}{x} dx \\ \frac{1}{2} \int \frac{1}{y^2 + 1} d(y^2) &= \int \frac{1}{x} dx \\ \frac{1}{2} \ln |y^2 + 1| &= \ln |x| + C \\ \ln(y^2 + 1) &= \ln(x^2) + C \\ y^2 + 1 &= e^{\ln(x^2) + C} \\ y &= \pm \sqrt{e^C x^2 - 1}\end{aligned}$$

利用給定條件 $y(1) = 3$ ，得

$$9 = e^C - 1 \Rightarrow e^C = 10$$

因此，解為

$$y = \sqrt{10x^2 - 1}.$$

(c) 由給定微分方程，得

$$e^{-y} dy = x e^{-x^2} dx$$

兩邊積分，

$$\begin{aligned}\int e^{-y} dy &= \int x e^{-x^2} dx \\ \int -e^{-y} dy &= \int -x e^{-x^2} dx \\ \int -e^{-y} dy &= \frac{1}{2} \int (-2x) e^{-x^2} dx \\ e^{-y} &= \frac{1}{2} e^{-x^2} + C\end{aligned}$$

由於 $y(1) = 0$ ，得 $e^{-0} = \frac{1}{2} e^{-1^2} + C \Rightarrow C = 1 - \frac{1}{2e}$ 。

因此，

$$\begin{aligned}e^{-y} &= \frac{1}{2} e^{-x^2} + 1 - \frac{1}{2e} \\ y &= -\ln \left(\frac{1}{2} e^{-x^2} + 1 - \frac{1}{2e} \right)\end{aligned}$$

2. (a) 積分因子為 $\mu(x) = e^{\int 1 dx} = e^x$ 。因此，

$$e^x(y' + y) = e^x(xe^{-x} + 1)$$

$$(e^x y)' = x + e^x$$

$$e^x y = \frac{x^2}{2} + e^x + C$$

$$y = \frac{x^2}{2}e^{-x} + 1 + Ce^{-x}$$

(b) 有 $\mu(x) = e^{\int \frac{2}{t} dt} = t^2$ ，故

$$\frac{d}{dt}(t^2 y) = 2t \sin t$$

$$t^2 y = \int 2t \sin t dt = -2t \cos t + 2 \sin t + C$$

由 $y(\frac{\pi}{2}) = 1$ ，得 $C = \frac{\pi^2}{4} - 2$ ，因此解為 $y = t^{-2}(-2t \cos t + 2 \sin t + \frac{\pi^2}{4} - 2)$ 。

3. 特徵方程為 $2r^2 - 3r + 1 = 0$ ，故 $r_1 = 1$ ， $r_2 = \frac{1}{2}$ 。

因此通解為 $y = C_1 e^t + C_2 e^{\frac{t}{2}}$ 。

$y(0) = 2$ 給出 $C_1 + C_2 = 2$ 。

$y'(0) = \frac{1}{2}$ 給出 $C_1 + \frac{C_2}{2} = \frac{1}{2}$ 。

解上述方程組，得 $C_1 = -1$ ， $C_2 = 3$ 。

因此解為 $y = -e^t + 3e^{\frac{t}{2}}$ 。

4. 選取向上方向為速度和力的正方向。根據牛頓第二定律，有

$$F(t) = ma(t) = mv'(t) = -mg - \frac{v(t)}{2},$$

故 $v'(t) + v(t) = -9.8$ ，初始條件 $v(0) = 9.8$ 。求解該一階線性方程，得

$$v(t) = -9.8 + 19.6e^{-t}.$$

5. (a) 設 t 表示時間，則 t 時刻容器內溶液體積為 $V(t) = 1000 - 15t + 10t$ 。解 $500 = 1000 - 15t + 10t$ 得 $t = 100$ 。

(b) 設 $S(t)$ 為 t 時刻的糖量。

$$\begin{cases} S(0) = 1000 \times 30 \\ S'(t) = \text{流入率} - \text{流出率} = 5 \times 10 - 15 \times \frac{S(t)}{V(t)} = 50 - \frac{3S(t)}{200-t}, \quad 0 \leq t < 200 \end{cases}$$

這是一階線性常微分方程。令 $\mu(x) = e^{\int \frac{3}{200-t} dt} = (200-t)^{-3}$ ，乘以其兩邊，得

$$[(200-t)^{-3}S]' = 50(200-t)^{-3}$$

$$(200-t)^{-3}S = 50 \int (200-t)^{-3} dt = 25(200-t)^{-2} + C$$

$$S = 25(200-t) + C(200-t)^3$$

利用初始條件 $S(0) = 30000$ ，得 $C = \frac{1}{320}$ 。

故解為 $S(t) = 25(200-t) + \frac{(200-t)^3}{320}$ 。

而 $S(100) = 5625$ 。

6. 將 $y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ 代入方程，得

$$\begin{aligned} & P(x)y' + Q(x)y \\ &= P(x)(c_1y_1 + c_2y_2)' + Q(x)(c_1y_1 + c_2y_2) \\ &= P(x)(c_1y_1' + c_2y_2') + Q(x)(c_1y_1 + c_2y_2) \\ &= c_1(P(x)y_1' + Q(x)y_1) + c_2(P(x)y_2' + Q(x)y_2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

因此 $y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ 也是解。

7. 將 $y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ 代入方程，得

$$\begin{aligned} & P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y \\ &= P(x)(c_1y_1 + c_2y_2)'' + Q(x)(c_1y_1 + c_2y_2)' + R(x)(c_1y_1 + c_2y_2) \\ &= P(x)(c_1y_1'' + c_2y_2'') + Q(x)(c_1y_1' + c_2y_2') + R(x)(c_1y_1 + c_2y_2) \\ &= c_1(P(x)y_1'' + Q(x)y_1' + R(x)y_1) + c_2(P(x)y_2'' + Q(x)y_2' + R(x)y_2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

因此 $y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ 也是解。

8. 解為 $y = 2 \sin(2t) + \cos(2t)$ 。因此週期為 π ，頻率為 $\frac{1}{\pi}$ 。