香港中文大學數學系
數學建模計劃團隊

mathmodel@math.cuhk.edu.hk

練習(微分法)

最後更新：2026年4月8日

部分A: 基本問題

1. 求下列各項。
   (a) $\frac{d}{dx}(5x^6)$
   (b) $\frac{d}{dx}(2x^{\frac{3}{2}})$
   (c) $\frac{d}{dx}(4x^2+5x+1)$
2. 求下列各函數對x 的導數。
   (a) $f(x)=6x^{-\frac{3}{2}}+4x+1$
   (b) $h(x)=9x^2-\frac{1}{2}x^4$
   (c) $v(x)=\left(8x+\frac{1}{2}\right)^2$
3. 求下列各表達式對x 的導數。
   (a) $y=2\sqrt{x}-4\sqrt{x^3}$
   (b) $y=x\sqrt{x}-\frac{1}{x^2}$
   (c) $y=4\sqrt{x}+\frac{1}{4\sqrt{x}}$
4. 對於下列各曲線，求該曲線在給定x 坐標點上的切線方程式。
   (a) $y=x^2-9x+13$，其中$x=6$。
   (b) $y=x^4+x+1$，其中$x=1$。
   (c) $y=3x^3-17x^3+24x-9$，其中$x=2$。
5. 對於下列各曲線，求在給定x 坐標的點處的法線方程。
   (a) $f(x)=x^3-4x^2+1$，其中$x=2$。
   (b) $f(x)=x^3-7x^2+11x$，其中$x=3$。
   (c) $f(x)=\frac{1}{4}x^5-18x+11$，其中$x=2$。

6. 對於下列各方程，求y 遞增或遞減的x 的取值範圍。

(a) $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 2$，遞增。

(b) $y = x^3 - 6x^2 + 12$，遞減。

部分B: 進階問題

7. 曲線C 的方程為

$$f(x) = 3x^2 - 8x + 2$$

   (a) 求曲線C 上$x = 1$ 處的斜率。

   (b) 點A 在曲線C 上，且A 處的斜率為4。求A 的坐標。

8. 曲線C 的方程為

$$y = -x^2(x + 1)$$

   曲線與坐標軸相交於原點O 及點A。

   (a) 求A 的坐標。

   (b) 證明直線$x + y + 1 = 0$ 在A 處與曲線C 相切。

9. 曲線C 的方程為

$$y = \frac{6}{x^2} + \frac{5x}{4} - 4, x \neq 0$$

   (a) 求$\frac{dy}{dx}$ 的表達式。

   (b) 求曲線在$x = 2$ 處的法線方程。

10. 設$y = x \sin x + \cos x$。

   (a) 求$\frac{dy}{dx}$ 及$\frac{d^2y}{dx^2}$。

   (b) 設k 為常數，使得$x\frac{d^2y}{dx^2} + k\frac{dy}{dx} + xy = 0$ 對所有實數x 成立。求k 的值。

11. 設$f(x) = e^x(\sin x + \cos x)$。

   (a) 求$f'(x)$ 及$f''(x)$。

   (b) 求在$0 \leq x \leq \pi$ 範圍內滿足$f''(x) - f'(x) + f(x) = 0$ 的x 值。

12. 曲線C 的方程為

$$y = \frac{x^3(5x\sqrt{x} - 128)}{\sqrt{x}}, x \in \mathbb{R}, x > 0$$

   (a) 求$\frac{dy}{dx}$、$\frac{d^2y}{dx^2}$ 及$\frac{d^3y}{dx^3}$ 的表達式。

   (b) 設A 為曲線C 上一點，且A 處的切線斜率為0。證明A 的y 坐標為$-k\sqrt[3]{4}$，其中k 為正整數。

   (c) 求$\frac{d^2y}{dx^2}$ 在A 處的值。答案以$\sqrt[3]{2}$ 表示。

   (d) 求$\frac{d^3y}{dx^3}$ 在曲線C 上滿足$\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ 的點處的值。

$\boxed{\text{解答}}$

1. (a) $30x^5$

   (b) $3x^{\frac{1}{2}}$

   (c) $8x + 5$

2. (a) $f'(x) = -9x^{-\frac{5}{2}} + 4$

   (b) $h'(x) = 18x - 2x^3$

   (c) $v'(x) = 128x + 8$

3. (a) $\frac{dy}{dx} = x^{-\frac{1}{2}} - 6x^{\frac{1}{2}}$

   (b) $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + 2x^{-3}$

   (c) $\frac{dy}{dx} = 2x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{8}x^{-\frac{3}{2}}$

4. (a) $\frac{dy}{dx} = 2x - 9$ 給出切線的斜率。

   代入$x = 6$ ，得3。

   又切線須通過點$(6, -5)$，

   因此，所求切線為$y = 3x - 23$。

   (b) $y = 5x - 2$

   (c) $y = -8x + 11$

5. (a) $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 8x$ 給出切線的斜率，其負倒數為法線的斜率。

   代入$x = 2$ 得-4，故法線的斜率為$\frac{1}{4}$。

   又法線須通過點$(2, -7)$。

   因此，所求法線為$4y = x - 30$。

   (b) $4y = x - 15$

   (c) $2y + x + 32 = 0$

6. (a) $\frac{dy}{dx} = 6x^2 - 6x - 12$

   當$\frac{dy}{dx} > 0$ 時，原函數遞增。

   $6x^2 - 6x - 12 > 0$

   因此$x < -1$ 或$x > 2$。

   (b) $0 < x < 4$

7. (a) $\frac{dy}{dx} = 6x - 8$

   代入$x = -1$，得-14。

(b) 設A 的x 坐標為x。

已知x 滿足$6x-8=4$。

因此$x=2$，A 的坐標為$(2,-2)$。

8. (a) 在坐標軸上，x 或y 為0。

直接計算可得A 的坐標為$(-1,0)$。

(b) 計算曲線在點A 處的切線。

$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(-x^3-x^2)=-3x^2-2x$。

代入$x=-1$ 得切線的斜率為-1。

又切線須通過A，這恰好給出$x+y+1=0$。

9. (a) $\frac{dy}{dx}=\frac{5}{4}-\frac{12}{x^3}$

(b) $y=4x-8$

10. (a) $\frac{dy}{dx}=x\cos x$

$\frac{d^2y}{dx^2}=-x\sin x+\cos x$

(b) 將方程明確寫出，得

$$x(-x\sin x+\cos x)+kx\cos x+x(x\sin x+\cos x)=0$$

比較x、$\sin x$ 及$\cos x$ 的係數，得$k=-2$。

11. (a) $f'(x)=2e^x\cos x$

$f''(x)=2e^x(\cos x-\sin x)$

(b) 寫出方程式，並比較$e^x\sin x$ 及$e^x\cos x$ 的係數，得$x=\frac{\pi}{4}$。

12. (a) $\frac{dy}{dx}=20x^3-320x^{\frac{3}{2}}$

$\frac{d^2y}{dx^2}=60x^2-480x^{\frac{1}{2}}$

$\frac{d^3y}{dx^3}=120x-240x^{-\frac{1}{2}}$

(b) A 的x 坐標為$\frac{dy}{dx}=0$ 在$x>0$ 時的解。

我們有$x=4\sqrt[3]{4}$。

將x 代入曲線C 的方程，得$k=3072$。

(c) 將$x=4\sqrt[3]{4}$ 代入$\frac{d^2y}{dx^2}$，得$960\sqrt[3]{2}$。

(d) 直接計算得$x=4$。

將$x=4$ 代入$\frac{d^3y}{dx^3}$，得360。