香港中文大學數學系
數學建模計劃團隊

mathmodel@math.cuhk.edu.hk

練習(直線方程)

最後更新：2026年3月30日

部分A: 基本問題

1. 若直線$y = mx + b$ 與$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ 互相垂直，試以a 及b 表示m。
2. 若直線$2x + y + k = 0$ 通過兩直線$x + y - 3 = 0$ 與$x - y + 1 = 0$ 的交點，求k 的值。
3. 直線L 的方程為$kx + 4y - 2k = 0$，其中k 為常數。若L 垂直於直線$6x - 9y + 4 = 0$，求L 的y 截距。
4. 直線L_2 垂直於L_1，且與L_1 相交於y 軸上的一點。求由L_1、L_2 及x 軸所圍成區域的面積。
5. 設O 為原點，A 及B 的坐標分別為$(-2, 0)$ 及$(4, 0)$，l 為通過A 且斜率為1 的直線，C 為l 上一點，使得$CO = CB$。
   (a) 求l 的方程。
   (b) 求C 的坐標。
   (c) 求通過O、B 及C 的圓的方程。
   (d) 若圓OBC 與l 於D 再次相交，求D 的坐標。
6. 若直線$hx + ky + 15 = 0$ 與$4x + 3y - 5 = 0$ 互相垂直，且相交於x 軸上的一點，求k。

部分B: 進階問題

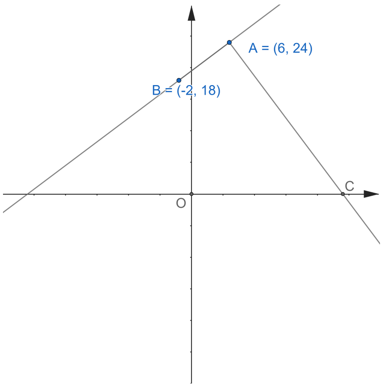
7. 在圖中，通過A 及B 的直線垂直於通過A 及C 的直線，其中C 為x 軸上的一點。

   (a) 求通過A 及B 的直線的方程。

   (b) 求C 的坐標。

   (c) 求$\triangle ABC$ 的面積。

   (d) 一條通過A 的直線將線段BC 截於D，使得$\triangle ABD$ 的面積為90 平方單位。設$BD : DC = r : 1$，求r 的值。



8. 直線$3x - y - 8 = 0$ 與$x - y - 2 = 0$ 相交於點P。L_1 及L_2 為通過P 且斜率分別為$\dfrac{1}{2}$ 及2 的直線。求它們的方程。

9. 設J 為圓$x^2 + y^2 = r^2$，其中$r > 0$。

   (a) 設直線$L : y = mx + c$ 為J 的切線。

      i. 證明$c^2 = r^2(m^2 + 1)$.

      ii. 若L 通過點(h, k)，證明$(k - mh)^2 = r^2(m^2 + 1)$。

   (b) J 內切於三角形PQR。P 及R 的坐標分別為$(7, 4)$ 及$(-5, 5)$。

      i. 求J 的半徑。

      ii. 利用(a)(ii) 或其他方法，求PQ 的斜率。

      iii. 求Q 的坐標。

10. 兩直線$L_1 : x - 2y + 3 = 0$ 與$L_2 : 2x - y - 1 = 0$。求通過它們的交點且具有相等正截距的直線L 的方程。

11. A 及B 的坐標分別為$(1, 2)$ 及$(7, 4)$。P 為線段AB 上一點，使得$\dfrac{AP}{PB} = k$。

   (a) 試以k 表示P 的坐標。

   (b) 由此，求直線$7x - 3y - 28 = 0$ 將線段AB 分成之比。

12. 點A 及B 的坐標分別為$(5, 7)$ 及$(13, 1)$。設P 為直角坐標平面上一動點，使得P 與A 及B 等距。記P 的軌跡為Γ。

(a) 求Γ 的方程。

(b) Γ 與x 軸及y 軸分別相交於H 及K。記原點為O。設C 為通過O、H 及K 的圓。有人聲稱C 的周界超過30。這聲稱是否正確？試解釋你的答案。

解答

1. $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ 可化為$y=-\dfrac{b}{a}x+b$。

   由於兩直線互相垂直，我們有$m\cdot(-\dfrac{b}{a})=-1$，

   因此$m=\dfrac{a}{b}$。

2. 兩直線的交點為$(1,2)$，

   因此$k=-4$。

3. 由於兩直線互相垂直，我們有$6k-36=0$，

   因此$k=6$，故L 的y 截距為3。

4. 在y 軸上的交點必為$(0,12)$。

   注意L_2 垂直於L_1，L_2 的方程為$3x-4y+48=0$。

   由L_1、L_2 及x 軸所圍成的區域為三角形，其底邊長為$16+9=25$，高為12，

   故所求的面積為96。

5. (a) l 的方程為$y=x+2$。

   (b) $C(2,4)$

   (c) 圓心的x 座標為$\dfrac{0+4}{2}=2$。

   設圓的方程為$(x-2)^2+(y-b)^2=r^2$，其中b 及r 為常數。

   代入$O(0,0)$ 及$C(2,4)$，得$b=\dfrac{3}{2}$，$r=\dfrac{5}{2}$。

   因此，圓的方程為$(x-2)^2+(y-\dfrac{3}{2})^2=\dfrac{25}{4}$。

   (d) 將$y=x+2$ 代入圓的方程，

   得到$x=2$ 或$-\dfrac{1}{2}$。

   因此，D 的座標為$(-\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2})$。

6. $(\dfrac{5}{4},0)$ 為直線$4x+3y-5=0$ 上一點，且位於x 軸上。

   因此，它也在$hx+ky+15=0$ 上，故$h=-12$。

   由於$hx+ky+15=0$ 與$4x+3y-5=0$ 互相垂直，我們有$4h+3k=0$。

   故$k=16$。

7. (a) 方程為$y=\dfrac{3}{4}x+\dfrac{39}{2}$。

   (b) AC 的方程為$y=-\dfrac{4}{3}x+32$，

   因此，C 的座標為$(24,0)$。

(c) 注意$|AB|=\sqrt{8^2+6^2}=10$ 及$|AC|=\sqrt{18^2+24^2}=30$，
因此面積為$\frac{10\cdot 30}{2}=150$。

(d) $\frac{BD}{DC}=\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ADC}}=\frac{90}{150-90}=\frac{3}{2}$，
因此，$r=\frac{3}{2}$。

8. P 的座標為$(3,1)$。
因此L_1 的方程為$y=\frac{1}{2}(x-3)+1=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$；$L_2$ 的方程為$y=2(x-3)+1=2x-5$。

9. (a) i. 合併L 與J 的方程，我們有$x^2+(mx+c)^2=r^2$。
因此$(1+m^2)x^2+2mcx+c^2-r^2=0$，
$\Delta=4m^2c^2-4(1+m^2)(c^2-r^2)=0$，
故$c^2=r^2(m^2+1)$。

ii. 將(h,k) 帶入L，得到$k=mh+c$，
因此$(k-mh)^2=c^2=r^2(m^2+1)$。

(b) i. PR 的方程為$\frac{y-4}{x-7}=\frac{-5-4}{-5-7}=\frac{3}{4}$，即$3x-4y-5=0$。
因此x 截距$=\frac{5}{3}$ 及y 截距$=\frac{-5}{4}$。
於是我們有

$$\frac{1}{2}r\sqrt{(\frac{5}{3})^2+(\frac{5}{4})^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{5}{4}$$

故$r=1$。

ii. 利用(a)(ii) 並代入$(h,k)=(7,4)$ 及$r=1$。
我們有$(4-7m)^2=m^2+1$，解得$m=\frac{3}{4}$ 或$\frac{5}{12}$。
因此$m_{PQ}=\frac{5}{12}$。

iii. 利用(a)(ii) 並代入$(h,k)=R=(-5,5)$ 及$r=1$。
我們有$(-5+5m)^2=m^2+1$，解得$m=\frac{3}{4}$ 或$\frac{4}{3}$。
因此$m_{QR}=\frac{4}{3}$。
設$Q=(a,b)$，我們有$\frac{b-4}{a-7}=\frac{5}{12}$ 及$\frac{b+5}{a+5}=\frac{4}{3}$。
解a 及b，可得$Q=(\frac{-7}{11},\frac{9}{11})$。

10. 我們先求P 的坐標，即$(\frac{5}{3},\frac{7}{3})$。
由於L 具有相等的正截距，其斜率為-1，
因此L 的方程為$x+y-4=0$。

11. (a) P 的座標為$(\frac{7k+1}{k+1},\frac{4k+2}{k+1})$。

(b) 當P 在直線$7x-3y-28=0$上時，

$$7(\frac{7k+1}{k+1})-3(\frac{4k+2}{k+1})-28=0$$

解得$k = 3$。

故比值為$3 : 1$。

12. (a) Γ 的方程為：

$(x-5)^2 + (y-7)^2 = (x-13)^2 + (y-1)^2$

$4x - 3y - 24 = 0$

(b) $H(6, 0)$ 及$K(0, -8)$

由於$\angle HOK = 90^\circ$，HK 為C 的一條直徑。

直徑$= \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$

因此，C 的周界為$10\pi = 31.4 > 30$，該聲稱正確。