香港中文大學數學系
數學建模計劃團隊

mathmodel@math.cuhk.edu.hk

練習(函數)

最後更新：2026年3月30日

部分A: 基本問題

1. 考慮函數$f(x) = |x| - x^2$。對於$x = 0, 1, -2, 3, -4, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$，找出相應的$f(x)$ 值。

2. 已知$y = ax^2 + b$，當$x = 1$ 時，$y = 10$；當$x = \frac{1}{2}$ 時，$y = -8$。找出a 和b 的值。

3. 在下列哪個問題中，y 是x 的函數？寫出函數$y = f(x)$ 的表達式。

   (a) x 是正方形一邊的長度，y 是此正方形的面積。

   (b) x 是矩形一邊的長度，矩形另一邊的長度為常數a，y 是此矩形的面積。

   (c) 三角形的一邊為x，此邊上的高為y，三角形的面積為常數S。

4. 一輛車離開車站，45 分鐘後到達距車站28 公里的A 點，此後車以40 公里每小時的恆速行駛，找出此車以恆速行駛後距車站距離s 公里與離開車站時間t 小時之間的關係，並找出t 的定義域。

5. 已知$f(x + 1) = x^2 - 3x + 2$，找出$f(x)$。

6. 給定$a < b < c$，找出函數$y = |x - a| + |x - b| + |x - c|$的最小值。

7. 找出下列函數的定義域

   (a) $y = \sqrt{4 - x^2} + \frac{1}{x}$。

   (b) $y = \sqrt{|x| - 3} + \frac{1}{x^2 - 4x + 5}$。

8. 找出下列函數的定義域。

   (a) $y = \frac{2}{x + |x|}$。

   (b) $y = \sqrt{x^2 - 3x + 2} + \frac{1}{x^2 + 2x - 8}$。

部分B: 進階問題

9. 給定函數$f(x)$ 滿足$f(x+\frac{1}{x})=x^2+\frac{1}{x^2}$,找出$f(3)$ 的值。

10. 假設$f(x)=ax^2+bx+c$，證明$f(x+3)-3f(x+2)+3f(x+1)-f(x)=0$。

11. 已知$f(\frac{1}{x})=x+\sqrt{1+x^2}$，找出$f(x)$。

12. 假設$f(1)=0$，$f(2)=1$，且$a^2f(n+2)=b^2f(n)$（$a>0$，$b>0$，n 為正整數），找出$f(n)$。

13. 令矩形的周長為常數l，一邊的長度為x。找出矩形的面積y 的最大值。

14. 假設$S(t)=\frac{2t}{1+t^2}$，$C(t)=\frac{1-t^2}{1+t^2}$，證明：

    (a) $S(t)=S(\frac{1}{t})$。

    (b) $S^2(t)+C^2(t)=1$。

15. 已知$f(\frac{2x+1}{x})=x^2-3x+7$，找出$f(x)$。

16. 假設$y=ax+\frac{1}{a}(2-x)$，其中$a>0$。當$0\leq x\leq 1$ 時，找出y 的最小值。

$\boxed{\text{解答}}$

1. 當$x=0$ 時，$f(x)=0$；當$x=1$ 時，$f(x)=0$；當$x=-2$ 時，$f(x)=-2$；當$x=3$ 時，$f(x)=-6$；當$x=-4$ 時，$f(x)=-12$；當$x=-\frac{1}{2}$ 時，$f(x)=\frac{1}{4}$；當$x=\frac{1}{2}$ 時，$f(x)=\frac{1}{4}$；當$x=-\frac{1}{3}$ 時，$f(x)=\frac{2}{9}$。

2. 從題目$\begin{cases} a+b=10, \\ \frac{a}{4}+b=-8. \end{cases}$ 因此，我們有$a=24$，$b=-14$。

3. (a) $y=x^2$。

   (b) $y=xa$。

   (c) $y=\frac{2S}{x}$。

4. $s=28+40(t-\frac{3}{4})$，其中定義域為$t\geq\frac{3}{4}$。

5. 令$a=x+1$。則$f(a)=(a-1)^2-3(a-1)+2=a^2-5a+6$。將$a$ 替換為x 得到$f(x)=x^2-5x+6$。

6. 我們將考慮四種情況。

   (a) $x\leq a$，則$y=a-x+b-x+c-x=a+b+c-3x\geq b+c-2a$。

   (b) $a\leq x\geq b$，則$y=x-a+b-x+c-x=b+c-a-x\geq c-a$。

   (c) $b\leq x\geq c$，則$y=x-a+x-b+c-x=c-a-b+x\geq c-a$。

   (d) $c\leq x$，則$y=x-a+x-b+x-c=3x-a-b-c\geq 2c-a-b$。

   其中，最小的是$c-a$。

7. (a) 從題目$\begin{cases} 4-x^2\geq 0, \\ x\neq 0, \end{cases}$，這意味著$\begin{cases} -2\leq x\leq 2, \\ x\neq 0. \end{cases}$ 因此，定義域為$-2\leq x\leq 2$ 且$x\neq 0$。

   (b) 從題目$\begin{cases} |x|-3\leq 0, \\ x^2-4x+5\neq 0, \end{cases}$，這意味著$\begin{cases} x\geq 3 \text{ 或} x\leq 3, \\ x\neq 5 \text{ 或} x\neq -1. \end{cases}$ 因此，定義域為$(-\infty,-3]$，$[3,5)$，以及$(5,+\infty)$。

8. (a) 從題目，$x+|x|\neq 0$。因此，$x>0$ 是定義域。

   (b) 從題目，$\begin{cases} x^2-3x+2\geq 0, \\ x^2+2x-8\neq 0, \end{cases}$。因此，定義域為$(-\infty,-4)$，$(-4,1]$，以及$(2,+\infty)$。

9. 注意$(x+\frac{1}{x})^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2$，我們可以得出$f(y)=y^2-2$。因此，$f(3)=7$。

10. 通過直接計算，$f(x+3)-3f(x+2)+3f(x+1)-f(x)$
$=[a(x+3)^2+b(x+3)+c]-3[a(x+2)^2+b(x+2)+c]+3[a(x+1)^2+b(x+1)+c]-[ax^2+bx+c]$
$=a[(x+3)^2-3(x+2)^2+3(x+1)^2-x^2]+b[(x+3)-3(x+2)+3(x+1)-x]+c(1-3+3-1)$
$=0$。

11. 令$a=\frac{1}{x}$。則，$f(a)=\frac{1}{a}+\sqrt{a+\frac{1}{a^2}}$。將$a$ 替換為x 得到$f(x)=\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$。

12. 我們將考慮兩種情況。

    (i) 當n 為奇數時，令$n=2k+1$。則$f(n)=f(2k+1)=(\frac{b^2}{a^2})f(2(k-1)+1)=(\frac{b^2}{a^2})^2f(2(k-2)+1)=\cdots=(\frac{b^2}{a^2})^kf(1)=0$

    (ii) 當n 為偶數時，令$n=2k$。則$f(n)=f(2k)=(\frac{b^2}{a^2})f(2(k-1))=(\frac{b^2}{a^2})^2f(2(k-2))=\cdots=(\frac{b^2}{a^2})^{k-1}f(2)=(\frac{b^2}{a^2})^{k-1}$

13. 從題目，$y=(\frac{l}{2}-x)x$。最小值由柯西不等式給出，即$y\leq(\frac{\frac{l}{2}-x+x}{2})^2=\frac{l^2}{16}$。

14. (a) $S(\frac{1}{t})=\frac{\frac{2}{t}}{1+\frac{1}{t^2}}=\frac{2t}{1+t^2}=S(t)$。

    (b) $S^2(t)+C^2(t)=\frac{(2t)^2+(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2}=\frac{4t^4+4t^2+1}{4t^4+4t^2+1}=1$。

15. 令$y=\frac{2x+1}{x}$，則$x=\frac{1}{y-2}$。$f(y)=x^2-3x+7=(\frac{1}{y-2})^2-\frac{3}{y-2}+7$。將$y$ 替換為x 得到$f(x)=\frac{1}{(x-2)^2}-\frac{3}{x-2}+7$。

16. 注意$y=(a-\frac{1}{a})x+\frac{2}{a}$，我們需要考慮$x$ 的係數是否為正。

    (i) 如果$a-\frac{1}{a}\geq 0$，這意味著$a\geq 1$，y 在$x=0$ 時達到最小值。最小值為$\frac{2}{a}$。

    (ii) 如果$a-\frac{1}{a}<0$，這意味著$0<a<1$，y 在$x=1$ 時達到最小值。最小值為$\frac{1}{a}+a$。