

香港中文大學數學系  
數學建模計劃團隊

mathmodel@math.cuhk.edu.hk

練習(指數與對數)

最後更新：2026年3月30日

部分A: 基本問題

1. 下列各數中，哪個是有理數？

- A.  $\sqrt{12^3}$
- B.  $\sqrt{4} \times \sqrt{3}$
- C.  $\sqrt{8} \div \sqrt{2}$
- D.  $\sqrt{8} + \sqrt{8}$
- E.  $\sqrt{3} - \sqrt{2}$

2. 試以 $a$ 表示 $\sqrt{25a} - \sqrt{4a}$ 。

3. (a) 化簡 $\frac{a^{\frac{5}{4}}\sqrt[4]{a^3}}{a^{-2}}$ 。

(b) 化簡 $\frac{x^3y^2}{x^{-3}y}$ ，並以正指數表示答案。

(c) 化簡 $\frac{a^3a^2}{b^{-2}}$ ，並以正指數表示答案。

4. (a) 計算 $\log_2 8 + \log_2 \frac{1}{16}$ 。

(b) 化簡 $\frac{\log a^3b^2 - \log ab^2}{\log \sqrt{a}}$ 。

5. 設 $a$ 及 $b$ 為常數。記 $y = a + \log_b x$ 的圖像為 $G$ ，當中 $G$ 的 $x$ 截距為9，並通過點(243, 3)。試以 $y$ 表示 $x$ 。

6. 解 $4^x = 10 - 4^{x+1}$ 。

7. 不使用計算機，解下列方程：

(a)  $3^x = \frac{1}{\sqrt{27}}$

(b)  $\log x + 2 \log 4 = \log 48$

**部分B: 進階問題**

8. 設  $x > y > 0$ 。若  $\log(x + y) = a$  及  $\log(x - y) = b$ ，試以  $a$  及  $b$  表示  $\log \sqrt{x^2 - y^2}$ 。
9. 若  $a$  及  $b$  為正整數，試以  $a$  及  $b$  表示  $\log_{a^b} b^a$ 。
10. 設  $b > 1$ 。若  $a = \log_{12} b$ ，試以  $b$  表示  $\frac{1}{a}$ 。
11. 若  $\frac{3}{3 \log x - 2} + 7 = \frac{2}{2 \log x + 1}$ ，則  $\log \frac{1}{x} = ?$
12. 若方程  $(\log_{\pi} x)^2 - 10 \log_{\pi} x + 24 = \log_{\pi} x$  的根為  $\alpha$  及  $\beta$ ，則  $\alpha\beta = ?$

**解答**

1. 答案：C。

A.  $\sqrt{12^3} = \sqrt{2^6 3^3} = 24\sqrt{3}$ ，為無理數

B.  $\sqrt{4} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ ，為無理數

C.  $\sqrt{8} \div \sqrt{2} = 2\sqrt{2} \div \sqrt{2} = 2$ ，為有理數

D.  $2\sqrt{8} = 4\sqrt{2}$ ，為無理數

E. 假設  $\sqrt{3} - \sqrt{2}$  為有理數，則其平方  $5 - 2\sqrt{6}$  亦為有理數，從而  $\sqrt{6}$  為有理數，矛盾。  
故  $\sqrt{3} - \sqrt{2}$  為無理數。

2. 答案 =  $5\sqrt{a} - 2\sqrt{a} = 3\sqrt{a}$

3. (a)  $a^4$

(b)  $x^6 y$

(c)  $a^7 b^2$

4. (a)  $3 + (-4) = -1$

(b)  $\frac{\log \frac{a^3 b^2}{ab^2}}{\log \sqrt{a}} = \frac{\log a^2}{\log \sqrt{a}} = \frac{4 \log \sqrt{a}}{\log \sqrt{a}} = 4$

5. 我們有

$$0 = a + \log_b 9 = a + 2 \log_b 3$$

$$3 = a + \log_b 243 = a + 5 \log_b 3$$

因此， $a = -2, \log_b 3 = 1$ .

$$y + 2 = y - a = \log_b x = (\log_b 3)(\log_3 x) = \log_3 x$$

故  $x = 3^{y+2}$ .

6. 我們有

$$4^x + 4^{x+1} = 10$$

$$5 \cdot 4^x = 10$$

$$4^x = 2$$

$$x = \frac{1}{2}$$

7. (a) 我們有

$$3^x = \frac{1}{\sqrt{27}} = \frac{1}{\sqrt{3^3}} = \frac{1}{3^{3/2}} = 3^{-3/2}$$

$$x = -\frac{3}{2}$$

(b) 我們有

$$\log x = \log 48 - 2 \log 4 = \log 48 - \log 4^2 = \log \frac{48}{4^2} = \log 3$$

故  $x = 3$ .

8. 答案 =  $\log \sqrt{x^2 - y^2} = \frac{1}{2} \log(x^2 - y^2) = \frac{1}{2} [\log(x + y) + \log(x - y)] = \frac{a + b}{2}$

9. 答案 =  $\frac{a \log b}{b \log a}$

10. 答案 =  $\frac{1}{\log_{12} b} = \log_b 12$

11. 答案 =  $-\frac{1}{2}$  or  $\frac{1}{3}$   
設  $t = \log x$ , 則有

$$\frac{3}{3t - 2} + 7 = \frac{2}{2t + 1}$$

$$t = \frac{1}{2} \text{ or } -\frac{1}{3}$$

$$\log \frac{1}{x} = -t = -\frac{1}{2} \text{ or } \frac{1}{3}$$

12. 答案 =  $\pi^{11}$

設  $\log_{\pi} x = t$ , 則有

$$t^2 - 11t + 24 = 0$$

$$\log_{\pi} \alpha\beta = \log_{\pi} \alpha + \log_{\pi} \beta = t_1 + t_2 = 11$$

$$\alpha\beta = \pi^{11}$$