香港中文大學數學系
數學建模計劃團隊
mathmodel@math.cuhk.edu.hk

練習（概率與統計）

最後更新：2026年5月11日

甲部：核心概念

1 概率(Probability)

概率為不確定性程度或某事件發生的可能性提供一個數值量度。
若樣本空間S 中共有n 個可能結果，其中m 個對事件A 有利，則事件A 的概率為

$$P(A) = \frac{\text{有利結果的數目}}{\text{可能結果的總數}} = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{m}{n}$$

例子：求擲一顆骰子得到3 或5 的概率。
解答：樣本空間$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，事件$A = \{3, 5\}$。
得$n(A) = 2$，$n(S) = 6$。因此$P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)} = \dfrac{1}{3}$。

2 集合符號重溫(Review of set notation)

1. **餘集(Complement)**
   事件A 的**餘集**是樣本中不屬於事件A 的所有結果組成的集合。事件A 的餘集記為A'。

2. **交集(Intersection)**
   事件$A \cap B$ 是事件A 與B 的**交集**，由同時屬於A 和B 的結果組成。

3. **互斥(Mutually Exclusive)**
   若$A \cap B = \emptyset$，則稱兩個事件**互斥**。

4. **併集(Union)**
   事件$A \cup B$ 是事件A 與B 的**併集**，由至少屬於A 或B 其中一個的結果組成。

5. **分配律(Distributive Laws)**
   $$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
   及
   $$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

6. **德摩根定律(De Morgan's Law)**
   $$(A \cap B)' = A' \cup B'$$
   $$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

3 概率定律(Law of probability)

1. **概率公理(Axioms of Probability)**
   對於樣本空間為$S = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 的試驗，我們可賦予概率$P(e_1), P(e_2), \cdots, P(e_n)$，條件為：

   (a) $0 \le P(e_i) \le 1$

(b) $P(e_1) + P(e_2) + \cdots + P(e_n) = 1.$

2. **餘集法則(Complement Rule)**

$$P(A') = 1 - P(A)$$

3. **加法法則(Addition Law)**
若A 與B 為不同事件，則

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

4 計數法則(Counting rules)

1. **排列(Permutations)**
從n 個不同物件中每次取r 個的排列數為

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

2. **組合(Combinations)**
從n 個不同物件中選取r 個$(r \leq n)$ 的不同子集（組合）數為

$${}_nC_r = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

5 條件概率與獨立性(Conditional probability and independence)

1. **條件概率(Conditional Probability)**
在B 給定的條件下，事件A 的**條件概率**為

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (P(B) > 0)$$

2. **獨立(Independence)**
若事件A 與B 滿足以下條件，則稱之為**獨立**

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

3. **分割(Partition)**
若事件$B_1, B_2, \cdots, B_k$ 滿足以下兩個條件，則稱它們構成樣本空間S 的一個**分割**：

(a) 對每一對i, j 有$B_i \cap B_j = \emptyset$

(b) $B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_k = S$

4. **貝葉斯法則(Bayes Rule)**
若$B_1, B_2, \cdots, B_k$ 構成樣本空間S 的一個分割，且$P(B_i) \neq 0$ $(i = 1, 2, \cdots, k)$，則對S 中任意事件A，

$$P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(B_i \cap A) = \sum_{i=1}^{k} P(B_i)P(A|B_i)$$

從而

$$P(B_j|A) = \frac{P(B_j)P(A|B_j)}{P(A)}$$

6 離散概率分佈(Discrete probability distributions)

1. **隨機變量(Random Variable)**

   隨機變量(RV) 是與某隨機試驗的每個結果相關聯的一個數值。若隨機變量X 只能取有限個或可數個可能值x，則稱X 為**離散**隨機變量。

   例子: 擲兩枚硬幣，記錄正面朝上的數目：$0, 1$ 或2。可觀察到以下結果：

結果	TT	HT	TH	HH
正面數目	0	1	1	2

   隨機變量以大寫字母$X, Y, Z, \cdots$ 表示，小寫x 表示X 的一個特定值。在上例中，若正面出現兩次則$x = 2$。現在我們考慮結果的概率。隨機變量X 取值x 的概率記為$P(X = x)$ 或簡記為$p(x)$。

   對於擲硬幣的隨機變量X，可得下表：

x	0	1	2
$p(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

   該表即為隨機變量X 的**概率分佈**。

2. **概率質量函數(Probability Mass Function)**

   若函數$p_X(x)$（或簡記為$p(x)$）滿足以下條件，則稱之為X 的**概率質量函數(PMF)**：

   (a) $P(X = x) = p_X(x) \geq 0$

   (b) $\sum_x P(X = x) = 1$，其中求和對所有可能的x 進行

   例子：一批8 部電腦中有3 部有缺陷。某學校隨機購買其中2 部，求缺陷數的PMF。

   解答：設X 為隨機變量，其值x 代表學校購買的缺陷電腦數。則x 可為$0, 1$ 或2。對每種情況：

   $$P(X = 0) = \frac{\binom{3}{0}\binom{5}{2}}{\binom{8}{2}} = \frac{10}{28}$$

   $$P(X = 1) = \frac{\binom{3}{1}\binom{5}{1}}{\binom{8}{2}} = \frac{15}{28}$$

   $$P(X = 2) = \frac{\binom{3}{2}\binom{5}{0}}{\binom{8}{2}} = \frac{3}{28}$$

   因此X 的PMF 為：

x	0	1	2
$p(x)$	$\frac{10}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{28}$

3. **累積分佈函數(Cumulative Distribution Function)**

   隨機變量X 的**累積分佈函數(CDF)** $F(x)$ 定義為

   $$F(x) = P(X \leq x)$$

   若X 為離散型(discrete)，則

   $$F(x) = \sum_{y \leq x} p(y)$$

   其中$p(x)$ 為概率質量函數。

   例子：求上例中隨機變量的CDF。

   解答：隨機變量X 的CDF 為：

   $F(0) = p(0) = \frac{10}{28}$，

$F(1) = p(0) + p(1) = \frac{10}{28} + \frac{15}{28} = \frac{25}{28}$，
$F(2) = p(0) + p(1) + p(2) = \frac{10}{28} + \frac{15}{28} + \frac{3}{28} = 1$。
因此，

$$F(x) = \begin{cases} 0 & 當 x < 0 \\ \frac{10}{28} & 當 0 \leq x < 1 \\ \frac{25}{28} & 當 1 \leq x < 2 \\ 1 & 當 x \geq 2 \end{cases}$$

4. **期望值(Expected Value)**
具有概率質量函數$p(x)$ 的離散隨機變量X 的**均值(mean)**或**期望值(expected value)**為

$$\mathbb{E}(X) = \sum_x xp(x)$$

5. **方差(Variance)**
期望值為μ 的隨機變量X 的**方差**為

$$V(X) = \sigma^2 = \mathbb{E}(X - \mu)^2 = \mathbb{E}(X^2) - \mu^2,$$

其中

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_x x^2 p(x)$$

6. **標準差(Standard Deviation)**
隨機變量X 的**標準差**是方差的平方根，即

$$\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\mathbb{E}(X - \mu)^2}$$

注：均值描述概率分佈的**中心(center)**，而標準差描述**離散程度(spread)**。
例子：某鄉村一週內火災應急次數的分佈如下：

x	0	1	2	3	4
$P(X = x)$	0.52	0.28	0.14	0.04	0.02

求$\mathbb{E}(X)$、$V(X)$ 和σ。
解答：由定義：

$$\mathbb{E}(X) = 0(0.52) + 1(0.28) + 2(0.14) + 3(0.04) + 4(0.02) = 0.76 = \mu$$

$$\mathbb{E}(X^2) = 0^2(0.52) + 1^2(0.28) + 2^2(0.14) + 3^2(0.04) + 4^2(0.02) = 1.52$$

$$V(X) = 1.52 - (0.76)^2 = 0.9424$$

$$\sigma = \sqrt{0.9424} \approx 0.9708$$

7. **伯努利分佈(Bernoulli Distribution)**
設X 為表示被檢項目狀態的隨機變量。約定：若項目有缺陷則$X = 1$，否則$X = 0$。（這是一個方便的記法，因為當我們檢查n 個這樣的項目時，設$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 表示它們的狀態，則缺陷總數為$X_1 + X_2 + \cdots + X_n$）

令p 表示觀察到缺陷項目的概率。則X 的概率分佈為：

x	0	1
$P(X = x)$	$q = 1 - p$	p

這樣的隨機變量稱為服從**伯努利分佈**。注意：

$$\mathbb{E}(X) = 0 \times p(0) + 1 \times p(1) = p$$

$$\mathbb{E}(X^2) = 0^2 \times p(0) + 1^2 \times p(1) = p$$

因此

$$V(X) = p - p^2 = pq$$

8. **二項分佈(Binomial Distribution)**
現在我們檢查n 個項目並計數缺陷總數。這種將試驗重複n 次的過程稱為伯努利試驗。伯努利試驗由以下性質正式定義：

   (a) 每次試驗的結果要麼是成功，要麼是失敗。

   (b) 成功的概率p 在各次試驗中保持不變。

   (c) 各次試驗相互獨立。

   (d) 隨機變量X 定義為n 次重複試驗中成功的次數。

這樣的隨機變量X 稱為服從**二項分佈**。假設每次伯努利試驗成功的概率為p，失敗的概率為$q = 1 - p$。則二項隨機變量X（n 次獨立試驗中的成功次數）的概率分佈為

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots, n$$

二項分佈的**均值**與**方差**為

$$\mathbb{E}(X) = np \quad \text{and} \quad V(X) = npq$$

我們可注意到二項分佈的均值和方差均為伯努利隨機變量的n 倍。

7 連續概率分佈(Continuous probability distributions)

1. **連續隨機變量(Continuous Random Variables)**
之前討論的所有隨機變量都是離散的，即它們只能取有限個（或至多可數個）值。然而，實際中許多隨機變量的可能值遠多於可數個。例如，礦石樣本的金屬含量可在0.10 到0.80 之間變化。此類隨機變量可取實數區間內的任意值，由於它們的可能值構成一個連續統，因此稱為**連續隨機變量**。

2. **概率密度函數(Probability Density Function)**
對於定義在實數集上的連續隨機變量X，若函數$f(x)$ 滿足以下條件，則稱為X 的**概率密度函數(PDF)**：

   (a) 對所有x，$f(x) \geq 0$

   (b) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

   (c) $P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)dx.$

備註：這意味著什麼？由於連續概率函數定義在無窮多個點上，單個點的概率總是**零**！概率是在區間上而非單個點上度量的。換言之，曲線下兩個不同點之間的面積定義了該區間的概率。這意味著概率函數的高度實際上可以大於1。積分等於1的性質與離散分佈中所有概率之和等於1的性質相對應。

3. **累積分佈函數(Cumulative Distribution Function)**
具有密度函數$f(x)$ 的連續隨機變量X 的**累積分佈函數(CDF)** 為

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

備註：由上式直接可得兩個結果：

(a) $P(a \leq x \leq b) = F(b) - F(a)$

(b) $f(x) = F'(x)$（若導數存在）

4. **期望值(Expected Values)**
具有概率密度函數$f(x)$ 的連續隨機變量X 的**期望值**或**均值**為

$$\mu = \mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

5. **方差(Variance)**
設X 為具有概率密度函數$f(x)$ 且均值$\mathbb{E}(X) = \mu$ 的隨機變量。X 的**方差**為

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x) dx = \mathbb{E}(X^2) - \mu^2$$

6. **中位數(Median)**
概率分佈的**中位數**定義為方程$F(m) = 0.5$ 的解（F 為CDF）。

	Discrete 離散	Continuous 連續
Probability 概率	$p(x) = P(X = x)$	$f(x) = \frac{d}{dx} P(X \leq x) = F'(x)$ and $P(X = x) = 0$ for any x
CDF	has jumps at every values of X	is continuous
Mean 均值	$\sum xp(x)$	$\int xp(x)dx$
Variance 方差	$\sum (x-\mu)^2 p(x)$	$\int (x-\mu)^2 p(x) dx$

7. **均勻分佈(Uniform Distribution)**
最簡單的連續分佈之一是連續**均勻分佈**。該分佈的特徵是密度函數為常數，從而在有限區間$[a, b]$ 內概率均勻。區間$[a, b]$ 上的連續均勻隨機變量X 的**PDF** 為

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{for } a < x < b \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

均勻分佈X 的**CDF** 為

$$F(x) = \int_a^x \frac{1}{b-a} dx = \frac{x-a}{b-a}, \quad a \leq x \leq b$$

均勻分佈的**均值**與**方差**為

$$\mu = \frac{a+b}{2} \quad \text{and} \quad \sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

8. **指數分佈(Exponential Distribution)**
若連續隨機變量X 的**PDF** 如下所示，則稱X 呈**指數分佈**，其中參數為β：

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}} & \text{for } x > 0 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

指數分佈的**均值**與**方差**為

$$\mu = \beta \quad \text{and} \quad \sigma^2 = \beta^2$$

指數分佈的**CDF** 有簡單形式：

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_0^t \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}} = 1 - e^{-\frac{x}{\beta}} \quad \text{for } x \geq 0$$

9. **正態分佈(Normal Distribution)**
在所有連續概率分佈中應用最廣泛的是**正態分佈**（也稱**高斯分佈**）。它是測量誤差、布朗運動下的粒子位移、股市波動、人類智力等許多現象的常用模型。它也用作二項分佈（n 較大時）的近似。

正態分佈的PDF 呈現著名的對稱鐘形曲線。曲線以均值μ 為中心，其離散程度由標準差σ 度量。這兩個參數μ 和σ^2 完全決定了正態密度函數的形狀與中心。
正態隨機變量X 的**PDF** 為

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right], \quad -\infty < x < \infty$$

記為$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$。

乙部：基礎問題

1. 約翰通過數學考試的概率為$\frac{4}{5}$，通過化學考試的概率為$\frac{5}{6}$。若他兩科都通過的概率為$\frac{3}{4}$，求他至少通過一科的概率。

2. 一包6 個燈泡中有2 個有缺陷。若選取3 個使用，求沒有一個有缺陷的概率。

3. 三個位元（0 或1 數字）通過一個有雜訊的通道傳輸，每個位元獨立地以0.1 的概率被翻轉。求：

   (a) 至少一個位元被翻轉的概率；

   (b) 恰好一個位元被翻轉的概率。

丙部：進階問題

4. 設X 為具有如下概率質量函數的隨機變量：

x	0	1	2	3	4
$P(X=x)$	0.52	0.28	0.14	0.04	0.02

計算隨機變量$Y=4X+3$ 的均值和方差。

5. 某種元件通過衝擊試驗的概率為0.75。求：

   (a) 接下來的8 個被測元件中恰好2 個通過的概率；

   (b) 至少2 個通過的概率；

   (c) 至多6 個通過的概率。

6. 假設某受控實驗室實驗中反應溫度的誤差（以$^{\circ}C$ 計）是一個連續隨機變量X，其密度為

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{3} & \text{for } -1\leq x\leq 2\\ 0 & \text{elsewhere}\end{cases}$$

   (a) 驗證概率總和確實為1；

   (b) 求$P(0<X<1)$。

7. 電池壽命X（以百小時計）的密度為

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} & \text{for } x>0\\ 0 & \text{elsewhere}\end{cases}$$

   (a) 求此類電池壽命小於200 小時或大於400 小時的概率。

   (b) 已知電池已使用超過200 小時，求其壽命超過300 小時的概率。

8. 電路板故障會中斷計算機系統的工作，直至新板送達。送達時間X 在至少一天至多五天區間上均勻分佈。故障與中斷的成本C 包括新零件的固定成本C_0 以及與X^2 成比例增加的成本，即

$$C=C_0+C_1X^2$$

   (a) 求送達時間為兩天或以上的概率。

   (b) 用C_0 和C_1 表示單次故障的期望成本。

9. 設備故障導致的停機時間被估計服從均值$\beta=6$ 小時的指數分佈。求下一次停機時間持續在5 到10 小時之間的概率。

丁部：解答

1. 設$M=$ 約翰通過數學考試，$C=$ 約翰通過化學考試。
$P(\text{約翰至少通過一科}) = P(M\cup C) = P(M)+P(C)-P(M\cap C) = \frac{4}{5}+\frac{5}{6}-\frac{3}{4}=\frac{53}{60}$

2. $P(\text{沒有一個有缺陷}) =$
$$= \frac{\text{選出3個非缺陷品的方式數}}{\text{選出樣本3個的總方式數}} = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{6}{3}} = \frac{1}{5}$$

3. (a) 利用餘集法則，$P(\text{至少一個}) = 1-P(\text{沒有})$。記$F_k$ 為第k 個位元被翻轉的事件，由獨立性得
$$\begin{aligned}&P(\text{至少一個})\\&=1-P(\text{沒有位元被翻轉})\\&=1-P(F_1'\cap F_2'\cap F_3')\\&=1-(1-0.1)^3\\&=0.271\end{aligned}$$
(b) 恰好翻轉一個位元有3 種方式：
$$P(\text{exactly one}) = P(F_1\cap F_2'\cap F_3')+P(F_1'\cap F_2\cap F_3')+P(F_1'\cap F_2'\cap F_3)=0.243$$

4. 在前面的例子中，我們已求得$\mathbb{E}(X)=0.76=\mu$，$V(X)=1.52-(0.76)^2=0.9424$
於是
$$\mathbb{E}(Y)=\mathbb{E}(4X+3)=\sum(4x+3)p(x)=4\sum xp(x)+3\sum p(x)=4\mathbb{E}(X)+3=6.04$$
$$V(Y)=V(4X+3)=V(4X)=4^2V(X)=15.08$$

5. (a) 假設各次試驗獨立，且每次試驗$p=0.75$，則
$$P(X=2)=\binom{8}{2}(0.75)^2(0.25)^{8-2}=0.003843$$
(b)
$$P(X\geq 2)=1-P(X=0)-P(X=1)$$
$$=1-[8(0.75)(0.25)^7+(0.25)^8]\approx 0.9996$$
(c)
$$P(X\leq 6)=1-P(X=7)-P(X=8)$$
$$=1-[8(0.75)^7(0.25)+(0.75)^8]\approx 0.633$$

6. (a)
$$\int_{\infty}^{\infty} f(x)dx=\int_{-1}^{2}\frac{x^2}{3}dx=\frac{8}{9}+\frac{1}{9}=1$$
(b)
$$P(0<X<1)=\int_0^1\frac{x^2}{3}dx=\frac{1}{9}$$

7. (a) 設A 為$X<2$ 的事件，B 為$X>4$ 的事件。則
$$\begin{aligned}&P(A\cup B)\\&=P(A)+P(B)\quad \text{思考：為什麼？}\\&=\int_0^2\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}dx+\int_4^{\infty}\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}dx\\&=1-e^{-1}+e^{-2}\\&\approx 0.767\end{aligned}$$

(b) 我們要求$P(X>3|X>2)$，根據條件概率定義，

$$P(X>3|X>2)=\frac{P(X>3)}{P(X>2)}=\frac{1-\int_0^3\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}dx}{1-\int_0^2\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}dx}=e^{-\frac{1}{2}}\approx 0.606$$

8. (a)

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4} & \text{當}1\leq x\leq 5\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

因此

$$P(X\geq 2)=\int_2^5\frac{1}{4}dx=\frac{3}{4}$$

(b) 已知

$$\mathbb{E}(C)=C_0+C_1\mathbb{E}(X^2)$$

故只需計算$\mathbb{E}(X^2)$。這可直接由定義或利用方差與均值關係$\mathbb{E}(X^2)=V(X)+\mu^2$ 求得。使用後者：

$$\mathbb{E}(X^2)=\frac{(b-a)^2}{12}+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{31}{3}$$

於是$\mathbb{E}(C)=\dfrac{31}{3}C_1+C_0$.

9. $P(5<X<10)=F(10)-F(5)=1-\exp(-\dfrac{10}{6})-\left(1-\exp(-\dfrac{5}{6})\right)\approx 0.2457.$