香港中文大學數學系
數學建模計劃團隊

mathmodel@math.cuhk.edu.hk

練習(二次多項式)

最後更新：2026年4月8日

部分A: 基本問題

1. 設$f(x) = ax^2 + bx - 1$，其中a 及b 為常數。已知$f(x)$ 可被$x - 1$ 整除，且$f(x)$ 除以$x + 1$ 的餘式為4。求a 及b 的值。

2. 設$f(x) = 2x^2 + ax + b$，
   (a) 已知$f(x)$ 除以$x - 1$ 的餘式為-5，且$f(x)$ 除以$x + 2$ 的餘式為4。求a 及b 的值。
   (b) 由此，求x 的值使得$f(x) = 0$。

3. 考慮函數$f(x) = x^2 + bx - 15$，其中b 為常數。已知$y = f(x)$ 的圖像通過點$(4\,,\,9)$。
   (a) 求b。由此（或其他方法），求$y = f(x)$ 圖像的兩個x 截距。
   (b) 設k 為常數。若方程$f(x) = k$ 有兩個相異實根，求k 的取值範圍。
   (c) 寫出一條與$y = f(x)$ 圖像僅相交於一點的直線的方程。

4. 設$\mathrm{p}(x) = 4x^2 + 12x + c$，其中$c$ 為常數。方程$\mathrm{p}(x) = 0$ 有等根。求
   (a) c。
   (b) $y = \mathrm{p}(x) - 169$ 圖像的x 截距。

5. 設$f(x) = x^2 + 2x - 2$ 及$g(x) = -2x^2 - 12x - 23$。
   (a) 將$g(x)$ 以$a(x + b)^2 + c$ 的形式寫出，其中a、b 及c 為實常數。由此證明對所有實數x，$g(x) < 0$。
   (b) 設k_1 及k_2（其中$k_1 > k_2$）為使得方程$f(x) + kg(x) = 0$ 有等根的兩個k 值。求k_1 及k_2。

部分B: 進階問題

6. 已知二次函數$y=ax^2+bx+c$ 的圖像的頂點在y 軸上，$c-b=2$，且通過點$(2\,,\,8)$（如圖1 所示），求該二次函數的解析式。

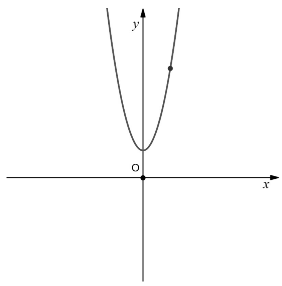

Figure 1: 問題 6 圖像

7. 拋物線$y=ax^2+bx+c$ 的頂點的x 坐標為1，且拋物線通過點$A(1\,,\,5)$ 及$B(3\,,\,1)$。求該拋物線的方程。

8. 已知二次函數$y=ax^2+bx+c$ 的圖像通過點$(-1\,,\,18)$，其兩個x 截距之間的距離為3，且滿足$b^2-4ac=9$，頂點在第四象限。求b 及c 的值。

9. 假設關於x 的二次方程$2ax^2-2x-3a-2=0$ 有一個根大於1，另一個根小於1，求a 的取值範圍。

10. 假設二次函數$y=ax^2+bx+c$ 在$x=1$ 處取得最大值3，且其圖像在x 軸上截得的線段長度為4，求該二次函數的係數a、b 及c。

11. 設a 及b 為兩實數，滿足

$$\sqrt{a^2-2a+1}+\sqrt{36-12a+a^2}=10-|b+3|-|b-2|\text{ﬁ}$$

求a^2+b^2 的最大值。

12. 已知方程$x^2-2mx+m^2-1=0$ 的兩個實根為α 及β，求m 與k 的關係，使得α 及β 位於方程$x^2-2mx+k=0$ 的兩個實根之間。

解答

1. $a=3,\ b=-2$

2. (a) $a=1,\ b=-6$

   (b) $x=-\dfrac{3}{2}$ 或$x=2$。

3. (a) $b=2$，兩個x 截距為-5 及3。

   (b) $k>-16$

   (c) $y=-16$

4. (a) $c=9$

   (b) 圖像的x 截距為-8 及5。

5. (a) $g(x)=-2(x+3)^2-5$

   (b) $k_1=1$ 及$k_2=-\dfrac{3}{10}$。

6. 因為$y=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+\dfrac{4ac-b^2}{4a}$，且圖像的頂點在$y$ 軸上，可得

$$-\frac{b}{2a}=0\,,$$

   即$b=0$。
   再由$c-b=2$ 得$c=2$。
   由於圖像通過$(2\,,\,8)$，則$8=a\times 2^2+0\times 2+2$，$a=\dfrac{3}{2}$。
   因此，解析式為

$$y=\frac{3}{2}x^2+2$$

7. $y=-x^2+2x+4$

8. $b=-7,\ c=10$

9. 根據題意，$y=f(x)=2ax^2-2x-3a-2$ 的圖像應在點$(1\,,\,0)$ 兩側各有一個x 截距。
   由圖像得

$$\begin{cases} a<0, \\ f(1)>0 \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} a>0, \\ f(1)<0. \end{cases}$$

   即

$$\begin{cases} a<0, \\ 2a-2-3a-2>0 \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} a>0, \\ 2a-2-3a-2<0. \end{cases}$$

   解之得$a>0$ 或$a<-4$。

10. 由於函數在$x = 1$ 處取得最大值3，可設為

$$y = a(x-1)^2 + 3 \quad (a < 0)$$

又因其圖像與x 軸相交，截得線段長度為4，且對稱軸為$x = 1$，故必通過點$A(-1\,,\,0)$及$B(3\,,\,0)$。因此$0 = a(-1-1)^2 + 3$，$a = -\dfrac{3}{4}$。

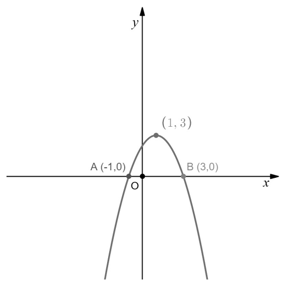

Figure 2: 問題 10 答案

再者，

$$y = -\frac{3}{4}(x-1)^2 + 3 = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}$$

所以$a = -\dfrac{3}{4}$，$b = \dfrac{3}{2}$，$c = \dfrac{9}{4}$。

11. $|a-1| + |a-6| + |b+3| + |b-2| = 10$。

注意$|b-2| + |b+3| \geq 5$ 及$|a-1| + |a-6| \geq 5$，且它們的和為10。

因此a 只能取1 至6 之間的值，而b 只能取-3 至2 之間的值。

於是易見$a^2 + b^2$ 的最大值為$6^2 + (-3)^2 = 45$。

12. $k < m^2 - 1$。