香港中文大學數學系
數學建模計劃團隊

**mathmodel@math.cuhk.edu.hk**

**練習(向量與矩陣)**

**最後更新：2026年4月8日**

## 部分A: 重點概念

1. **定義（向量）** 形如$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 的物件稱為 **（$n$ 維）向量**。元素$a_1, a_2, \cdots, a_n$ 稱為該向量的**條目**或**分量**。
   **例子**。所有分量$a_1, a_2, \cdots, a_n$ 均為實數的$n$ 維向量集合記作$\mathbb{R}^n$。
   例如$(3, -2, 0)$ 及$(-1, 1, 4)$ 均屬於$\mathbb{R}^3$。
   **注釋：** $\mathbb{R}^n$ 中的向量可寫為**列向量**
   $$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$
   而非**行向量** $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$。

2. **定義（矩陣）** 一個所有元素皆為實數的$m \times n$ **矩陣**是如下形式的矩形陣列：
   $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$
   其中每個條目$a_{ij}$ $(1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$ 都是一個實數。我們稱$i = j$ 的條目$a_{ij}$ 為矩陣的**對角線條目**。條目$a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}$ 組成矩陣的**第$i$ 行**，而條目$a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{mj}$ 組成矩陣的**第$j$ 列**。
   **注釋：** 在本筆記中，我們用大寫字母（例如$A$、$B$ 及$C$）表示矩陣，並用$A_{ij}$ 表示矩陣$A$ 中位於第$i$ 行第$j$ 列的條目。此外，若矩陣的行數與列數相等，則稱之為**方陣**。

3. **定義（向量加法、純量乘法）**
   $\mathbb{R}^n$ 是一個配備了坐標式加法與純量乘法運算的集合；即，若$u = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n$，$v = (b_1, b_2, \cdots, b_n) \in \mathbb{R}^n$，且$c \in \mathbb{R}$，則
   $$u + v = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_n + b_n) \quad 及 \quad cu = (ca_1, ca_2, \cdots, ca_n).$$
   **例子：** 在$\mathbb{R}^3$ 中，有
   $$(3, -2, 0) + (-1, 1, 4) = (2, -1, 4) \quad \text{and} \quad -5(1, -2, 0) = (-5, 10, 0).$$

4. **定義（矩陣加法、純量乘法）**
所有元素皆為實數的$m \times n$ 矩陣集合記作$M_{m\times n}(\mathbb{R})$，並定義了以下**矩陣加法**與**純量乘法**運算：對於$A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ 及$c \in \mathbb{R}$，

$$(A+B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij} \quad \text{及} \quad (cA)_{ij} = cA_{ij}$$

其中$1 \le i \le m$ 及$1 \le j \le n$。
**例子**：在$M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ 中，

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 & -2 & 6 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

及

$$-3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -6 \\ 9 & -6 & -9 \end{pmatrix}$$

5. **定義（矩陣乘法）** 設$A$ 為一個$m \times n$ 矩陣，$B$ 為一個$n \times p$ 矩陣。我們定義$A$ 與$B$ 的**乘積**（記作$AB$）為一個$m \times p$ 矩陣，使得對於$1 \le i \le m,\ 1 \le j \le p$，

$$(AB)_{ij} = A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \cdots + A_{in}B_{nj} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj}$$

**注釋**：為了使乘積$AB$ 存在，$A$ 與$B$ 的尺寸必須滿足特定條件。以下助記方法或有幫助：$(m \times n) \cdot (n \times p) = (m \times p)$。也就是說，兩個「內」維數必須相等，而兩個「外」維數則決定了乘積矩陣的大小。
**例子**：我們有

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 4 + 2\cdot 2 + 1\cdot 5 \\ 0\cdot 4 + 4\cdot 2 + (-1)\cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 3 \end{pmatrix}$$

注意維度關係$(2\times 3)\cdot(3\times 1) = (2\times 1)$。

6. **定義（單位矩陣）** $n \times n$ **單位矩陣** $I_n$ 的定義為：若$i = j$，則$(I_n)_{ij} = 1$；若$i \ne j$，則$(I_n)_{ij} = 0$。可以驗證，對於所有$n \times n$ 矩陣$A$，有$AI_n = I_nA = A$。

7. **定義（轉置）** 一個$m \times n$ 矩陣$A$ 的**轉置** $A^T$ 是通過互換$A$ 的行與列得到的$n \times m$ 矩陣；即$(A^T)_{ij} = A_{ji}$。
**例子**：

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 5 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

8. **定義（跡）** 方陣$A$ 的**跡**定義為其所有對角線元素之和，記作$tr(A)$。

**例子**：

$$tr(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}) = 1 + 4 = 5$$

9. **定義（行列式）** 若

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

是一個元素皆為實數的$2\times 2$ 矩陣，則我們定義$A$ 的**行列式** ，記作$\det(A)$ 或$|A|$，為$ad-bc$。
**例子：**在$M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ 中，對於矩陣

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{及} \quad B=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

我們有

$$\det(A)=1\cdot 4-2\cdot 3=-2 \quad \text{及} \quad \det(B)=3\cdot 4-2\cdot 6=0$$

一般情況下，$\det(A+B)\neq \det(A)+\det(B)$。

在將行列式的定義推廣至$n\geq 3$ 的$n\times n$ 矩陣之前，先引入以下記號會較為方便：
**記號**：給定$A\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$，對於$n\geq 2$，用$\tilde{A}_{ij}$ 表示從$A$ 中刪除第$i$ 行及第$j$ 列後得到的$(n-1)\times(n-1)$ 矩陣。因此，對於

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}\in M_{3\times 3}(\mathbb{R}),$$

我們有

$$\tilde{A}_{11}=\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}_{13}=\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}, \quad \text{及} \quad \tilde{A}_{32}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

而對於

$$B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ -3 & 4 & 1 & -1 \\ 2 & -5 & -3 & 8 \\ -2 & 6 & -4 & 1 \end{pmatrix}\in M_{4\times 4}(\mathbb{R}),$$

我們有

$$\tilde{B}_{23}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & 8 \\ -2 & 6 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{及} \quad \tilde{B}_{42}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 8 \end{pmatrix}.$$

10. **定義（行列式）** 設$A\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$。若$n=1$，即$A=(A_{11})$，我們定義$\det(A)=A_{11}$。對於$n\geq 2$，我們遞歸地定義$\det(A)$ 為

$$\det(A)=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}A_{1j}\cdot\det(\tilde{A}_{1j}).$$

純量$\det(A)$ 稱為$A$ 的**行列式**，有時也記為$|A|$。

純量

$$c_{ij} = (-1)^{i+j}\det(\tilde{A}_{ij})$$

稱為$A$ 中位於第$i$ 行第$j$ 列的元素的**餘因子**。

現在我們可以將$A$ 的行列式公式表示為：

$$\det(A) = A_{11}c_{11} + A_{12}c_{12} + \cdots + A_{1n}c_{1n}.$$

這個公式稱為沿$A$ 的**沿第一行進行的餘因子展開**。你可以驗證對於$2\times 2$ 矩陣，此行列式的定義與上述定義相符。

**例子**：設

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ -3 & -5 & 2 \\ -4 & 4 & -6 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

沿$A$ 的第一行進行餘因子展開，得

$$\begin{aligned}
\det(A) &= (-1)^{1+1}A_{11}\cdot\det(\tilde{A}_{11}) + (-1)^{1+2}A_{12}\cdot\det(\tilde{A}_{12}) + (-1)^{1+3}A_{13}\cdot\det(\tilde{A}_{13}) \\
&= (-1)^2(1)\cdot\det\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} + (-1)^3(3)\cdot\det\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -4 & -6 \end{pmatrix} + (-1)^4(-3)\cdot\det\begin{pmatrix} -3 & -5 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \\
&= 1(22) - 3(26) - 3(-32) \\
&= 40
\end{aligned}$$

11. **定義（非奇異）** 若一個方陣的行列式不為零，則稱之為**非奇異**矩陣。

**注釋**：方陣的行列式可以通過沿任意一行進行餘因子展開來計算。即，若$A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$，則對於任意整數$i\,(1 \le i \le n)$，

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}A_{ij}\cdot\det(\tilde{A}_{ij}).$$

12. **定義（逆矩陣）** 設$A$ 為一個$n\times n$ 矩陣。若存在一個$n\times n$ 矩陣$B$ 使得$AB = BA = I$，則$A$ 是**可逆**的。

若$A$ 可逆，則滿足$AB = BA = I$ 的矩陣$B$ 是唯一的（試證明此點）。矩陣$B$ 稱為$A$ 的**逆矩陣**，記作$A^{-1}$。

**例子**：驗證

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{的逆矩陣為} \quad \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

**部分B: 基本問題**

1. 計算$-2u+4v$，其中$u=\begin{pmatrix}-2\\-2\\2\end{pmatrix}$ 及$v=\begin{pmatrix}0\\4\\5\end{pmatrix}$。

2. 計算

   (a) $\begin{pmatrix}2&5&-3\\1&0&7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4&-2&5\\-5&3&2\end{pmatrix}$

   (b) $\begin{pmatrix}-6&4\\3&-2\\1&8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}7&-5\\0&-3\\2&0\end{pmatrix}$

   (c) $4\begin{pmatrix}2&5&3\\1&0&7\end{pmatrix}$

3. 計算

   (a) $\begin{pmatrix}2&1\\4&3\end{pmatrix}^2$

   (b) $\begin{pmatrix}2&1\\4&3\end{pmatrix}^{-1}$

4. (a) 計算$\begin{pmatrix}3&7\\-1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&1\\4&2\end{pmatrix}$

   (b) 計算$\begin{pmatrix}5&3\\6&4\end{pmatrix}$ 的逆矩陣。

5. 若$M=\begin{pmatrix}7&u\\2&3\end{pmatrix}$ 及$|M|=1$，求$u$ 的值。

6. 若$A=\begin{pmatrix}2&8\\1&4\end{pmatrix}$，計算$A^2-4A$。

7. 設$A$ 為$m\times n$ 矩陣，$B$ 及$C$ 為$n\times p$ 矩陣。證明$A(B+C)=AB+AC$。

**部分C: 進階問題**

8. 設$n$ 為正整數。

   (a) 定義$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$，

      i. 計算$A^2$, $A^3$, $A^4$。

      ii. 你能猜出$A^n$ 的一般形式嗎？試用數學歸納法證明它。

      iii. 類似地，求$(A^{-1})^n$。

   (b) i. 化簡$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} 2^k \quad$ (i.e., $2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1}$)。

      ii. 你能猜出$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^n$ 的一般形式嗎？試用數學歸納法證明它。

9. (a) i. 對任意矩陣$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 及$N = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$，證明$tr(MN) = tr(NM)$。

      ii. 設$A$ 及$B$ 為$2 \times 2$ 矩陣，且$BAB^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$。利用(i) 的結果，證明$tr(A) = 4$。

   (b) 設$C = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$。已知存在非零向量$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ 及相異純量$\lambda_1$、$\lambda_2$，使得$C\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ 及$C\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$。

      i. 證明$\begin{vmatrix} p-\lambda_1 & q \\ r & s-\lambda_1 \end{vmatrix} = 0$ 及$\begin{vmatrix} p-\lambda_2 & q \\ r & s-\lambda_2 \end{vmatrix} = 0$。

      ii. 由此，證明$\lambda_1$ 及$\lambda_2$ 是方程$\lambda^2 - \mathrm{tr}(C)\cdot\lambda + \det(C) = 0$ 的根。

10. 設$A = \begin{pmatrix} \alpha+\beta & -\alpha\beta \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，其中$\alpha$ 及$\beta$ 為相異實數。設$I$ 為$2 \times 2$ 單位矩陣。

   (a) 證明$A^2 = (\alpha+\beta)A - \alpha\beta I$。

   (b) 利用(a) 或其他方法，證明$(A-\alpha I)^2 = (\beta-\alpha)(A-\alpha I)$ 及$(A-\beta I)^2 = (\alpha-\beta)(A-\beta I)$。

   (c) 設$X = s(A-\alpha I)$ 及$Y = t(A-\beta I)$，其中$s$ 及$t$ 為實數。假設$A = X + Y$。

      i. 試以$\alpha$ 及$\beta$ 表示$s$ 及$t$。

      ii. 對任意正整數$n$，證明$X^n = \dfrac{\beta^n}{\beta-\alpha}(A-\alpha I)$ 及$Y^n = \dfrac{\alpha^n}{\alpha-\beta}(A-\beta I)$。

      iii. 對任意正整數$n$，將$A^n$ 以$pA + qI$ 的形式寫出，其中$p$ 及$q$ 為實數。

      （注意：已知對於任意$2\times 2$ 矩陣$H$ 及$K$，若 $HK = KH = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,則對任意正整數$n$, $(H+K)^n = H^n + K^n$）

11. 定義$M = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$。設$X = \begin{pmatrix} a & 6a \\ b & c \end{pmatrix}$ 為非零實矩陣，且$MX = XM$。

(a) 試以$a$ 表示$b$ 及$c$。

(b) 證明$X$ 為非奇異矩陣。

(c) 記$X$ 的轉置為$X^T$，試以$a$ 表示$(X^T)^{-1}$。

12. 設$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

(a) 設$I$ 及$O$ 分別為$3 \times 3$ 單位矩陣及零矩陣。

i. 證明$P^3 - 2P^2 - P + I = \mathbf{0}$。

ii. 利用(i) 的結果或其他方法，求$P^{-1}$。

(b) i. 證明$D = P^{-1}AP$。

ii. 證明$D$ 及$A$ 均為非奇異矩陣。

iii. 求$(D^{-1})^{100}$。

由此或其他方法，求$(A^{-1})^{100}$。

**部份D: 解答**

1. $-2u+4v=-2\begin{pmatrix}-2\\-2\\2\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}0\\4\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\4\\-4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\16\\20\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\20\\16\end{pmatrix}$

2. (a) $\begin{pmatrix}6&3&2\\-4&3&9\end{pmatrix}$

   (b) $\begin{pmatrix}1&-1\\3&-5\\3&8\end{pmatrix}$

   (c) $\begin{pmatrix}8&20&-12\\4&0&28\end{pmatrix}$

3. (a) $\begin{pmatrix}8&5\\20&13\end{pmatrix}$

   (b) $\begin{pmatrix}\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\\-2&1\end{pmatrix}$

4. (a) $\begin{pmatrix}3&7\\-1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&1\\4&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(3)(-2)+(7)(4)&(3)(1)+7(2)\\(-1)(-2)+(4)(4)&(-1)(1)+(4)(2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}22&17\\18&7\end{pmatrix}$

   (b) $\begin{pmatrix}5&3\\6&4\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{(5)(4)-(3)(6)}\begin{pmatrix}4&-3\\-6&5\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4&-3\\-6&5\end{pmatrix}$

5. 6

6. $\begin{pmatrix}4&16\\2&8\end{pmatrix}$

7. 我們有

$$\begin{aligned}[A(B+C)]_{ij}&=\sum_{k=1}^{n}A_{ik}(B+C)_{kj}\\&=\sum_{k=1}^{n}A_{ik}(B_{kj}+C_{kj})\\&=\sum_{k=1}^{n}(A_{ik}B_{kj}+A_{ik}C_{kj})\\&=\sum_{k=1}^{n}A_{ik}B_{kj}+\sum_{k=1}^{n}A_{ik}C_{kj}\\&=(AB)_{ij}+(BC)_{ij}\\&=(AB+BC)_{ij}\end{aligned}$$

8. (a) i. $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 4 & 1\end{pmatrix}$

ii. $\begin{pmatrix}1 & 0\\ n & 1\end{pmatrix}$

iii. $\begin{pmatrix}1 & 0\\ -n & 1\end{pmatrix}$ （以數學歸納法證明）

(b) i. $2^n - 1$

ii. $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2^n-1 & 2^n\end{pmatrix}$ （以數學歸納法證明）

9. (a) i. $tr(MN) = ae + bg + cf + dh = ea + fc + gb + hd = tr(NM)$.

ii. 利用(i) 的結果，得

$$tr(A) = tr\left(B^{-1}\left(\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}B\right)\right)\right) = tr\left(\left(\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}B\right)B^{-1}\right)\right)$$

$$= tr\left(\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}(BB^{-1})\right)\right) = tr\left(\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}I\right)\right) = tr\left(\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}\right)\right) = 1 + 3 = 4$$

(b) i. 由於存在非零向量$\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}$ 使得$C\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix} = \lambda_1\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}$，我們有$(C-\lambda_1 I)\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix} = 0$，即

$$\begin{pmatrix}p-\lambda_1 & q\\ r & s-\lambda_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix} = 0.$$

若$\begin{vmatrix}p-\lambda_1 & q\\ r & s-\lambda_1\end{vmatrix} \neq 0$，則逆矩陣$\begin{pmatrix}p-\lambda_1 & q\\ r & s-\lambda_1\end{pmatrix}^{-1}$ 存在。

將上述等式兩邊同時左乘$\begin{pmatrix}p-\lambda_1 & q\\ r & s-\lambda_1\end{pmatrix}^{-1}$，得$\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix} = 0$。

這與該向量為非零向量的條件矛盾。

因此$\begin{vmatrix}p-\lambda_1 & q\\ r & s-\lambda_1\end{vmatrix} = 0$。同理，$\begin{vmatrix}p-\lambda_2 & q\\ r & s-\lambda_2\end{vmatrix} = 0$。

ii. 由(a)，我們有

$$\begin{vmatrix}p-\lambda_1 & q\\ r & s-\lambda_1\end{vmatrix} = (p-\lambda_1)(s-\lambda_1) - rq = 0,$$

由此得

$$\lambda_1^2 - (p+s)\lambda_1 + ps - rq = 0.$$

同樣地，

$$\lambda_2^2 - (p+s)\lambda_2 + ps - rq = 0.$$

又$p + s = \mathrm{tr}(C)$，$ps - rq = \det(C)$。

因此$\lambda_1$、$\lambda_2$ 是方程$\lambda^2 - \mathrm{tr}(C)\cdot\lambda + \det(C) = 0$ 的兩個根。

10. (a) 直接計算，得

$$\begin{aligned}\text{LHS} &= A^2\\ &= \begin{pmatrix}\alpha+\beta & -\alpha\beta\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha+\beta & -\alpha\beta\\ 1 & 0\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta & -\alpha\beta(\alpha+\beta)\\ \alpha+\beta & -\alpha\beta\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{RHS} &= (\alpha+\beta)A-\alpha\beta I\\ &= (\alpha+\beta)\begin{pmatrix}\alpha+\beta & -\alpha\beta\\ 1 & 0\end{pmatrix}-\alpha\beta\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}(\alpha+\beta)^2 & -\alpha\beta(\alpha+\beta)\\ (\alpha+\beta) & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\alpha\beta & 0\\ 0 & \alpha\beta\end{pmatrix}\end{aligned}$$

因此，我們有$A^2=(\alpha+\beta)A-\alpha\beta I$。

(b) $(A-\alpha I)^2=A^2-2\alpha A+\alpha^2 I=(\alpha+\beta)A-\alpha\beta I-2\alpha A+\alpha^2 I=(\beta-\alpha)(A-\alpha I)$；同理可得$(A-\beta I)^2$。

(c) i. $s=\dfrac{\beta}{\beta-\alpha}$, $t=\dfrac{\alpha}{\alpha-\beta}$.

ii. $X^n=s^n(A-\alpha I)^n=s^n(\beta-\alpha)^{n-1}(A-\alpha I)=\dfrac{\beta^n}{\beta-\alpha}(A-\alpha I)$；同理可得$Y^n$。

iii. $XY=YX=\mathbf{0}$，且$A^n=(X+Y)^n=X^n+Y^n$，故$pA+qI=A^n$，其中$p=\dfrac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$，$q=\dfrac{\alpha\beta^n-\beta\alpha^n}{\alpha-\beta}$。

11. (a) $b=-2a$, $c=-3a$.

(b) $\det(X)\neq 0$ 當$a\neq 0$；若$a=0$，則$X$ 為零矩陣，故$a\neq 0$。

(c) $a^{-1}\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & \frac{2}{9}\\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{9}\end{pmatrix}$

12. (a) i. 直接計算得$P^2=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&2&3\end{pmatrix}$ 及$P^3=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&5\\3&5&6\end{pmatrix}$。因此，我們有

$$P^3-2P^2-P+I=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&5\\3&5&6\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&2&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\mathbf{0}.$$

ii. $P^{-1}=I+2P-P^2=\begin{pmatrix}0&-1&1\\-1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$

(b) i. $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，直接計算得$D = P^{-1}AP$。

ii. $|A| = |D| = 4 \neq 0$

iii. $(D^{-1})^{100} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2^{100}} \end{pmatrix}$，因此$A^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{-100} \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 2^{-100} & 0 & 0 \\ 2^{-100} - 1 & 1 & 0 \\ 2^{-100} - 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.