香港中文大學數學系
數學建模計劃團隊

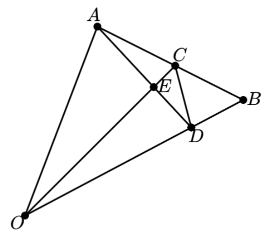
mathmodel@math.cuhk.edu.hk

練習(向量)

最後更新：2026年4月8日

部分A: 基本問題

1. 在下圖中，OAB 為一三角形。C 及D 分別為AB 及OB 上的點，使得$AC : CB = 8 : 7$ 及$OD : DB = 16 : 5$。OC 與AD 相交於點E。設$\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ 及$\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$。



(a) 試以$\mathbf{a}$ 及$\mathbf{b}$ 表示$\overrightarrow{OC}$ 及$\overrightarrow{AD}$。

(b) 設$\overrightarrow{OE} = r\overrightarrow{OC}$ 及$\overrightarrow{AE} = k\overrightarrow{AD}$。

i. 試以r、$\mathbf{a}$ 及$\mathbf{b}$ 表示$\overrightarrow{OE}$。

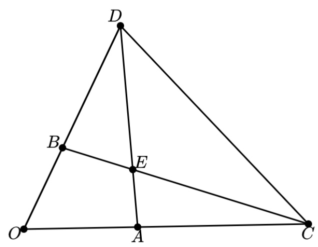
ii. 試以k、$\mathbf{a}$ 及$\mathbf{b}$ 表示$\overrightarrow{OE}$，由此證明$r = \dfrac{6}{7}$ 及$k = \dfrac{3}{5}$。

(c) 已知$EC : ED = 1 : 2$。

i. 利用(b) 或其他方法，求$EA : EO$。

ii. 解釋為何$OACD$ 為一圓內接四邊形。

2. 下圖顯示三角形OCD。A 及B 分別為OC 及OD 上的點，使得$OA : AC = OB : BD = 1 : h$，其中$h > 0$。$AD$ 與BC 相交於E，且$AE : ED = \mu : (1 - \mu)$ 及$BE : EC = \lambda : (1 - \lambda)$，其中$0 < \mu < 1$ 及$0 < \lambda < 1$。設$\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ 及$\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$。



(a) 考慮$\overrightarrow{OE}$，證明$\mu=\lambda$。

(b) F 為CD 上一點，使得O、E 及F 共線。證明OF 為$\triangle OCD$ 的中線。

(c) 利用以上結果，證明在三角形中，形心將每一條中線分成$2:1$ 的比。

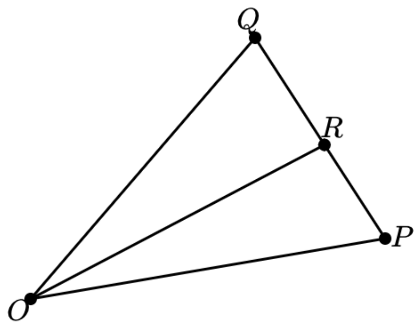
3. 已知$\overrightarrow{OA}=5\mathbf{i}-\mathbf{j}$, $\quad\overrightarrow{OB}=-3\mathbf{i}+5\mathbf{j}$ ，且APB 為一直線。

(a) 求$\overrightarrow{AB}$ 及$|\overrightarrow{AB}|$。

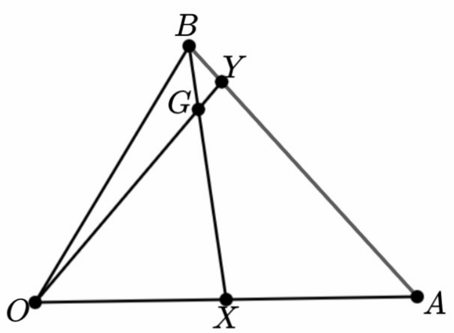
(b) 若$|\overrightarrow{AP}|=4$，求$\overrightarrow{AP}$。

4. (a) 在下圖中，OPQ 為一三角形。R 為PQ 上一點，使得$PR:RQ=r:s$。試以r、s、$\overrightarrow{OP}$ 及$\overrightarrow{OQ}$ 表示$\overrightarrow{OR}$。

由此證明：若$\overrightarrow{OR}=m\overrightarrow{OP}+n\overrightarrow{OQ}$，則$m+n=1$。



(b) 在下圖中，OAB 為一三角形。X 為OA 的中點，Y 為AB 上一點。BX 與OY 相交於點G，且$BG:GX=1:3$。設$\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$ 及$\overrightarrow{OB}=\mathbf{b}$。



i. 試以$\mathbf{a}$ 及$\mathbf{b}$ 表示$\overrightarrow{OG}$。

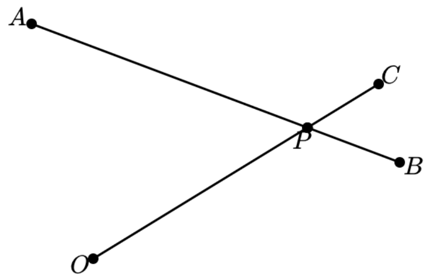
ii. 利用(a) 部，試以$\mathbf{a}$ 及$\mathbf{b}$ 表示$\overrightarrow{OY}$。
（提示：設$\overrightarrow{OY}=k\overrightarrow{OG}$）

iii. 延長AG 至OB 上一點Z。設$\overrightarrow{OZ} = h\overrightarrow{OB}$。

A. 求h 的值。

B. 判斷ZY 是否平行於OA。

5. 在下圖中，點P 以相同比例$3 : 1$ 分割線段AB 及OC。
設$\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ 及$\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$。



(a) 試以$\mathbf{a}$ 及$\mathbf{b}$ 表示$\overrightarrow{OP}$。

(b) 試以$\mathbf{a}$ 及$\mathbf{b}$ 表示$\overrightarrow{OC}$，由此證明OA 平行於BC。

解答

1. (a) $\overrightarrow{OC}=\frac{7}{15}\mathbf{a}+\frac{8}{15}\mathbf{b}$, $\overrightarrow{AD}=-\mathbf{a}+\frac{16}{21}\mathbf{b}$

   (b) i. $\overrightarrow{OE}=\frac{7r}{15}\mathbf{a}+\frac{8r}{15}\mathbf{b}$

   ii. $\overrightarrow{OE}=\mathbf{a}+k(-\mathbf{a}+\frac{16}{21}\mathbf{b})=(1-k)\mathbf{a}+\frac{16k}{21}\mathbf{b}$

   $$\begin{cases}\frac{7r}{15}=1-k\\ \frac{8r}{15}=\frac{16k}{21}\end{cases}$$

   解方程組，得$r=\frac{6}{7}$ 及$k=\frac{3}{5}$。

   (c) i. $2:1=ED:EC=\frac{2}{5}AD:\frac{1}{7}OC$，所以$EA:EO=\frac{3}{5}AD:\frac{6}{7}OC=\frac{1}{4}(ED:EC)=1:2$。

   ii. $EC:ED=EA:EO$，因此$EC\cdot EO=EA\cdot ED$，這表示$OACD$ 為一圓內接四邊形。

2. (a) $\overrightarrow{OE}=\lambda(1+h)\mathbf{a}+(1-\lambda)\mathbf{b}=(1-\mu)\mathbf{a}+\mu(1+h)\mathbf{b}$，故$\lambda=\mu=\frac{1}{h+2}$。

   (b) 設$\overrightarrow{OF}=t\overrightarrow{OE}$，則$t\lambda(h+1)+t(1-\lambda)=1+h$, $t=\frac{h+2}{2}$, $\overrightarrow{OG}=\frac{1+h}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\frac{\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}}{2}$，因此$F$ 為CD 的中點。

   (c) 設$h=1$，則$\lambda=\frac{1}{h+2}=1/3$，於是$AE:ED=BE:EC=1:2$。

3. (a) $\overrightarrow{AB}=-8\mathbf{i}+6\mathbf{j}$, $\left|\overrightarrow{AB}\right|=10$

   (b) $\overrightarrow{AP}=\pm\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}=\pm(-\frac{16}{5}\mathbf{i}+\frac{12}{5}\mathbf{j})$

4. (a) $\overrightarrow{OR}=\frac{s}{r+s}\overrightarrow{OP}+\frac{r}{r+s}\overrightarrow{OQ}$，其中$\frac{s}{r+s}+\frac{r}{r+s}=1$。

   (b) i. $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OX}+\frac{3}{4}\overrightarrow{OB}=\frac{1}{8}\mathbf{a}+\frac{3}{4}\mathbf{b}$

   ii. $\overrightarrow{OY}=k\overrightarrow{OG}=\frac{k}{8}\mathbf{a}+\frac{3k}{4}\mathbf{b}$，由(a) ，$\frac{k}{8}+\frac{3k}{4}=1$，得$k=\frac{8}{7}$, $\overrightarrow{OY}=\frac{1}{7}\mathbf{a}+\frac{6}{7}\mathbf{b}$。

   iii. A. $\overrightarrow{AG}=-\frac{7}{8}\mathbf{a}+\frac{3}{4}\mathbf{b}$，設$\overrightarrow{AZ}=t\overrightarrow{AG}$，則$-\frac{7t}{8}\mathbf{a}+\frac{3t}{4}\mathbf{b}+\mathbf{a}=h\mathbf{b}$，得$t=\frac{8}{7}$, $h=\frac{6}{7}$。

   B. $ZY=\frac{1}{7}\mathbf{a}$，故ZY 平行於OA。

5. (a) $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{4}\mathbf{a}+\frac{3}{4}\mathbf{b}$

(b) $\overrightarrow{OC} = \frac{4}{3}\overrightarrow{OP} = \frac{1}{3}\mathbf{a} + \mathbf{b}$

$\overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}\mathbf{a}$，故$OA$ 平行於BC。