香港中文大學
數學系

學習成果

完成本教材所介紹的層級分析法（AHP）學習後，學習者將能夠：

1. 描述AHP 的核心目的及其在結構化多準則決策（multi-criteria decision making）中的作用，包括其將複雜決策問題分解為可管理組件的能力。

2. 為AHP 構建有效的成對比較矩陣（pairwise comparison matrices），遵守關鍵規則（倒數屬性$a_{ji} = 1/a_{ij}$，對角線元素$a_{ii} = 1$），並解釋判斷值（例如：中等/强烈重要性比率）。

3. 應用特徵向量法（eigenvector method）從成對比較矩陣推導出優先權向量（priority vectors），包括：

   - 建立特徵方程式$|A - \lambda I_n| = 0$ 以找出主特徵值（principal eigenvalue）$\lambda_{\max}$。

   - 計算對應於$\lambda_{\max}$ 的未歸一化特徵向量（unnormalized eigenvector），並將其歸一化以形成有效的優先權向量（總和為1）。

4. 應用幾何平均法（geometric mean method）計算優先權向量，包括計算各列的幾何平均值$g_i = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} a_{ij}}$，並將這些值歸一化以獲得最終權重。

5. 執行成對比較矩陣的一致性檢查（consistency checks），包括：

   - 使用公式$CI = \frac{\lambda_{\max} - n}{n-1}$ 計算一致性指標（Consistency Index, CI）。

   - 使用標準表中的隨機一致性指標（Random Consistency Index, RI）計算一致性比率（Consistency Ratio, CR = CI/RI)。

   - 解釋一致性結果（根據Saaty 的準則，如果$CR < 0.1$ 則接受判斷）。

6. 綜合AHP 結果，結合準則權重和替代方案的優先權，得出決策替代方案的最終排名。

7. 在現實世界決策問題（例如選擇交通工具）的背景下，解釋和傳達AHP 的輸出（優先權向量、一致性比率、最終排名）。

1 AHP 簡介

層級分析法（AHP）是一種用於相對測量的理論和方法。相對測量著重於事物之間的比較，即比例之間的關係。它適用於無法獲得精確數量測量的情況，以及必須從有限的替代方案中選出最佳方案的問題。選項的社會影響可透過使用安全、舒適、易用性、感知影響等準則來比較這些選項來表達。

一般而言，AHP 可應用於具備單一目標及一組有限替代方案$X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ 的決策問題，決策者通常被要求從中選擇最好的一個。我們使用一個與商業無關的簡單案例研究來介紹AHP：一個由四人（父親、母親和兩個孩子）組成的家庭想從香港前往上海，但尚未決定使用哪種交通工具。這個家庭可以選擇汽車、火車或飛機。他們的目標是選擇能帶給他們最高整體滿意度的交通工具，這由兩個準則決定：價格（cost price）和舒適度（comfort）。在數學上：

- 替代方案：$X = \{x_1, x_2, x_3\} = \{$汽車, 火車, 飛機$\}$
- 決策準則：$C = \{c_1, c_2\} = \{$價格, 舒適度$\}$

2 準則與替代方案的成對比較

AHP 的第一步是使用決策樹（decision tree）描繪問題。在其最簡單的形式中，決策問題的目標置於頂部，待選擇的替代方案置於其下方（見圖1）。決策準則將在後續步驟中加入決策樹。

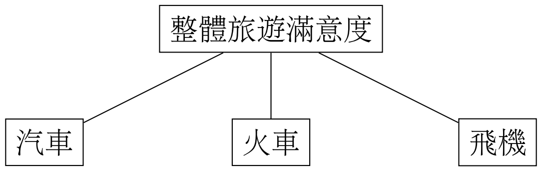

Figure 1: 選擇假期交通工具的決策樹（目標和替代方案集合）

在AHP 中，決策者為每個替代方案x_i 分配一個權重因子w_i。所有權重因子的總和必須等於1，這些數值構成權重向量W。在交通工具的例子中，權重向量為：

$$W = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.08 \\ 0.19 \\ 0.73 \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

權重向量的轉置表示法為：

$$W = (w_1, w_2, w_3)^{\mathrm{T}} = (0.08, 0.19, 0.73)^{\mathrm{T}}$$

其中T 代表轉置。w_1、w_2 和w_3 分別對應汽車、火車和飛機。這表示偏好排名為：飛機> 火車> 汽車（偏好分別為73上述的簡單情況不需要數學方法。然而，涉及多個準則和替代方案的複雜問題難以直接進行排名。AHP 透過對準則和替代方案進行成對比較來解決此問題，這對人類來說比同時進行多因素判斷要容易得多。

成對比較讓決策者每次能專注於兩個元素，將複雜的問題分解為較小的子問題。這些比較的結果儲存在一個成對比較矩陣 A 中，這是一個$n \times n$ 矩陣，其中n 是被比較的元素（替代方案或準則）數量。對於交通工具的例子：

- 飛機比汽車强烈優先考慮($w_3/w_1 = 7$)
- 火車比汽車中等優先考慮($w_2/w_1 = 3$)
- 飛機比火車强烈優先考慮($w_3/w_2 = 5$)
- 互為倒數關係成立（例如，汽車對飛機：$w_1/w_3 = 1/7$）

在假期交通模式的案例中，飛機强烈優先於汽車，而火車中等優先於汽車（記住偏好是飛機> 火車> 汽車）。這以權重偏好表達，其中w_1 是汽車選項的權重偏好，w_2 是火車選項，w_3 是飛機選項。對這些權重偏好進行成對比較可得出替代方案的相對偏好。讓我們使用以下相對偏好：飛機對汽車$w_3/w_1 = 7$，火車對汽車：$w_2/w_1 = 3$ 以及汽車對汽車：$w_1/w_1 = 1$。此外，飛機選項强烈優先於火車選項，這由權重因子$w_3/w_2 = 5$ 表達。毋庸置疑，如果飛機强烈優先於汽車($w_3/w_1 = 7$)，那麼汽車就絶對不優先於飛機，這由權重因子$w_1/w_3 = 1/7$ 表達。相互比較替代方案的分數會收集在一個矩陣中，稱為比較矩陣A。根據Saaty (1980)，比較矩陣A 中的每個元素a_{ij} 近似於替代方案x_i 和x_j 權重的比率：

$$a_{ij} \approx \frac{w_i}{w_j}; \quad \forall i, j \tag{2.2}$$

在假期交通模式案例中，比較矩陣A 如(2.3) 所示。為方便起見，我們標示了替代方案x_1、x_2 和x_3 在A 內的位置：

$$A = \begin{bmatrix} \frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} & \frac{w_1}{w_3} \\ \frac{w_2}{w_1} & \frac{w_2}{w_2} & \frac{w_2}{w_3} \\ \frac{w_3}{w_1} & \frac{w_3}{w_2} & \frac{w_3}{w_3} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \frac{1}{1} & \frac{1}{3} & \frac{1}{7} \\ \frac{3}{1} & \frac{1}{1} & \frac{1}{5} \\ \frac{7}{1} & \frac{5}{1} & \frac{1}{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{7} \\ 3 & 1 & \frac{1}{5} \\ 7 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \to x_1 \\ \to x_2 \\ \to x_3 \end{array} \tag{2.3}$$

其中每列對應於一個替代方案相對於所有其他替代方案的相對偏好。在第一列中，替代方案x_1 相對於x_1、x_2 和x_3 的相對偏好使用其權重因子w_1、w_2 和w_3 來表達。在第二列中，表達替代方案x_2 相對於x_1、x_2 和x_3 的相對偏好，第三列則是替代方案x_3 的相對偏好。

矩陣項目的解釋

首先，定義交通替代方案：

- x_1: 汽車(權重w_1)
- x_2: 火車(權重w_2)
- x_3: 飛機(權重w_3)

矩陣規則：項目$a_{ij} = \frac{w_i}{w_j}$ 意味著相對於行（*column*）替代方案j，列（*row*）替代方案i 有多受青睞。

第1 列：基準替代方案= x_1 (汽車)

- $a_{11} = \frac{w_1}{w_1} = 1$：汽車對汽車– 偏好相等（對角線元素總是1）
- $a_{12} = \frac{w_1}{w_2} = \frac{1}{3}$：對汽車的偏好度是火車的1/3（火車比汽車好3 倍）
- $a_{13} = \frac{w_1}{w_3} = \frac{1}{7}$：對汽車的偏好度是飛機的1/7（飛機比汽車好7 倍）

第2 列：基準替代方案= x_2 (火車)

- $a_{21} = \frac{w_2}{w_1} = 3$：對火車的偏好度比汽車高3 倍
- $a_{22} = \frac{w_2}{w_2} = 1$：火車對火車– 偏好相等
- $a_{23} = \frac{w_2}{w_3} = \frac{1}{5}$：對火車的偏好度是飛機的1/5（飛機比火車好5 倍）

第3 列：基準替代方案= x_3 (飛機)

- $a_{31} = \frac{w_3}{w_1} = 7$：對飛機的偏好度比汽車高7 倍
- $a_{32} = \frac{w_3}{w_2} = 5$：對飛機的偏好度比火車高5 倍
- $a_{33} = \frac{w_3}{w_3} = 1$：飛機對飛機– 偏好相等

重要屬性：矩陣是互為倒數的：$a_{ij} = \frac{1}{a_{ji}}$（例如，$a_{12} = 1/3$ 且$a_{21} = 3$）。

3 AHP 評分標準與比較次數

為了結構化成對比較，Saaty 和Vargas (1991) 開發了一個基本標準，使用奇數（偶數作為中間值），如表1 所示。

Table 1: 根據Saaty 和Vargas (1991) 的基本AHP 標準

等級 (重要性强度)	定義	解釋
1	同等重要	兩項活動對目標有相同的貢獻
2	微弱	中間值
3	中等重要	經驗和判斷略微偏向其中一項活動
4	中等偏强	中間值
5	强烈重要	經驗和判斷强烈偏向其中一項活動
6	强烈偏强	中間值
7	相當强烈或已證實之重要性	非常强烈地偏好其中一項活動；其主導地位已在實踐中證實
8	非常、非常强烈	中間值
9	極端重要	偏好其中一項活動的證據達到最高可能的肯定程度

成對比較也可以圖形化表示（圖2），量表上的標記表示兩個替代方案之間偏好的强度。

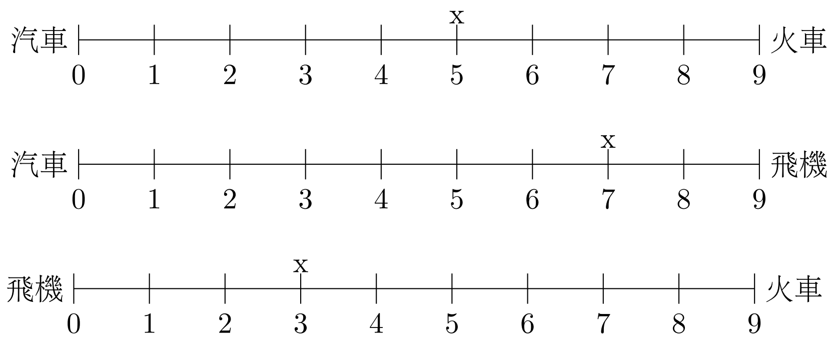

Figure 2: 假期交通工具範例偏好的成對比較圖形表示

替代方案所需的成對比較次數由資料元素每次取2 個的組合公式得出：

$$\text{比較次數} = \frac{n(n-1)}{2}$$

表2 顯示了針對不同的n 值所對應的比較次數。

Table 2: 取決於替代方案數量的比較次數

替代方案數量n	1	2	3	4	5	6	7	n
比較次數	0	1	3	6	10	15	21	$\frac{n(n-1)}{2}$

4 準則與替代方案的成對比較

AHP 的第一步是使用包含頂部目標，後跟準則和替代方案的決策樹來描繪問題（見圖3）。

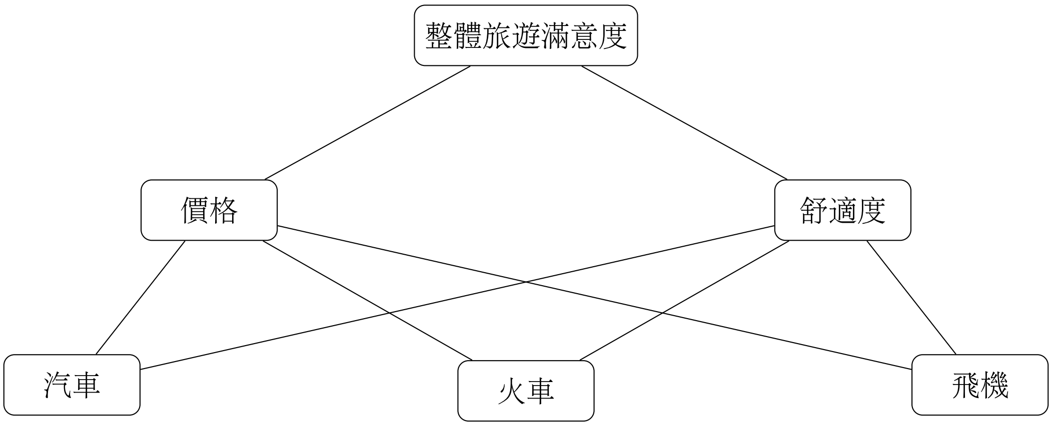

Figure 3: 選擇假期交通工具的延伸決策樹（目標、準則和替代方案）

在大多數決策問題中，會加入一組準則$C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ 並應用於不同的替代方案。在選擇偏好的假期交通模式案例中，選擇準則是$C = \{c_1, c_2\} = \{\text{價格}, \text{舒適度}\}$。包含目標、決策準則和替代方案的延伸決策樹如圖3 所示。請注意，對於每個準則（在此例中為價格和舒適度），替代方案的相關相對偏好可能會有所不同。因此，分析層級程序的下一步是為每個準則建立一個比較矩陣。這些比較矩陣由A_i 表示，其中下標的索引i 參照特定準則c_i，在該準則下對替代方案進行成對比較。相關的優先權向量W_i 也是如此。

對於涉及多個準則的複雜問題，AHP 同時使用準則和替代方案的成對比較。一個成對比較矩陣A（一個$n \times n$ 矩陣）儲存了這些比較，其中每個元素$a_{ij} \approx \frac{w_i}{w_j}$ 反映了相較於x_j，對x_i 的相對偏好。

5 個別準則的比較矩陣

對於每個準則，我們構建一個成對比較矩陣並推導出相應的優先權向量。

準則1：價格

給出成對比較矩陣A_p 和優先權向量W_p：

$$A_p = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ \frac{1}{3} & 1 & 3 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}; \quad W_p = \begin{bmatrix} 0.64 \\ 0.26 \\ 0.10 \end{bmatrix} \tag{5.1}$$

矩陣A_p 代表了在「價格」準則下，家庭對每個替代方案的偏好。

- $A_p(1,2) = 3$：家庭對汽車的偏好是火車的3 倍。
- $A_p(1,3) = 5$：家庭對汽車的偏好是飛機的5 倍。
- $A_p(2,3) = 3$：家庭對火車的偏好是飛機的3 倍。
- 優先權向量W_p 顯示了歸一化的權重，總和為1。

排名為：汽車(0.64) > 火車(0.26) > 飛機(0.10)，這符合家庭對便宜旅行的偏好。

準則2：舒適度

給出成對比較矩陣A_c 和優先權向量W_c：

$$A_c = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{5} \\ 3 & 1 & \frac{1}{3} \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}; \quad W_c = \begin{bmatrix} 0.10 \\ 0.26 \\ 0.64 \end{bmatrix} \tag{5.2}$$

矩陣A_c 代表了在「舒適度」準則下，家庭對每個替代方案的偏好。

- $A_c(1,2) = 1/3$：家庭對火車的偏好是汽車的3 倍。
- $A_c(1,3) = 1/5$：家庭對飛機的偏好是汽車的5 倍。
- $A_c(2,3) = 1/3$：家庭對飛機的偏好是火車的3 倍。
- 優先權向量W_c 顯示了歸一化的權重，總和為1。

排名為：飛機(0.64) > 火車(0.26) > 汽車(0.10)，這符合家庭對更舒適旅行的偏好。

準則的成對比較矩陣

接著，我們比較這兩個準則（價格和舒適度）的相對重要性。家庭認為價格的重要性是舒適度的兩倍。比較矩陣$\widehat{A}$ 和優先權向量$\widehat{W}$ 為：

$$\widehat{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}; \quad \widehat{W} = \begin{bmatrix} 0.67 \\ 0.33 \end{bmatrix} \tag{5.3}$$

其中$\widehat{w}_1 = 0.67$ 是價格的權重，$\widehat{w}_2 = 0.33$ 是舒適度的權重。

$\widehat{W}$ 的推導： 對於2×2 矩陣$\begin{bmatrix} 1 & a \\ 1/a & 1 \end{bmatrix}$，其優先權向量永遠是$\begin{bmatrix} a/(1+a) \\ 1/(1+a) \end{bmatrix}$。在此處，$a = 2$，所以：

$$\widehat{W} = \begin{bmatrix} \widehat{w}_1 \\ \widehat{w}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/(1+2) \\ 1/(1+2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.67 \\ 0.33 \end{bmatrix}$$

最終偏好排名

每個替代方案的最終偏好分數是透過各個準則優先權向量的加權算術平均數（weighted arithmetic mean）計算得出：

$$W_{\text{final}} = \widehat{w}_1 W_p + \widehat{w}_2 W_c$$

代入方程式(5.1)、(5.2) 和(5.3) 的數值：

$$W_{\text{final}} = 0.67 \begin{bmatrix} 0.64 \\ 0.26 \\ 0.10 \end{bmatrix} + 0.33 \begin{bmatrix} 0.10 \\ 0.26 \\ 0.64 \end{bmatrix}$$

計算每個成分：

$$\begin{aligned} W_{\text{汽車}} &= 0.67 \times 0.64 + 0.33 \times 0.10 = 0.4288 + 0.033 = 0.4618 \\ W_{\text{火車}} &= 0.67 \times 0.26 + 0.33 \times 0.26 = 0.1742 + 0.0858 = 0.2600 \\ W_{\text{飛機}} &= 0.67 \times 0.10 + 0.33 \times 0.64 = 0.067 + 0.2112 = 0.2782 \end{aligned}$$

最終排名為：汽車(0.46) > 飛機(0.28) > 火車(0.26)。

Table 3: 假期交通工具的AHP 結果摘要

替代方案	價格($\widehat{w}_1 = 0.67$)	舒適度($\widehat{w}_2 = 0.33$)	最終分數(W_{final})	排名
汽車	0.64	0.10	0.46	1
火車	0.26	0.26	0.26	3
飛機	0.10	0.64	0.28	2

6 背景定義

對於AHP 成對比較矩陣$A = [a_{ij}]$：

$$a_{ij} = \text{元素}i \text{ 對元素}j \text{ 的重要性}, \quad a_{ji} = \frac{1}{a_{ij}}, \quad a_{ii} = 1$$

優先權重（Priority weights）透過幾何平均法計算（標準AHP）：

$$g_i = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} a_{ij}}, \qquad w_i = \frac{g_i}{\sum_{k=1}^{n} g_k}$$

其中：

- g_i：第i 列的幾何平均值（未歸一化權重）
- w_i：歸一化的最終優先權重（所有權重總和$= 1$）

替代方案定義：

$$x_1 = \text{汽車},\ x_2 = \text{火車},\ x_3 = \text{飛機}$$

7 價格準則矩陣A_p 推導

A_p 的構建

基於成本/價格的判斷：

1. 汽車比火車中等重要：$a_{12} = 3$
2. 汽車比飛機强烈重要：$a_{13} = 5$
3. 火車比飛機中等重要：$a_{23} = 3$
4. 下三角矩陣的倒數規則：$a_{21} = \frac{1}{3},\ a_{31} = \frac{1}{5},\ a_{32} = \frac{1}{3}$
5. 對角線項目永遠為1：$a_{ii} = 1$

因此價格比較矩陣為：

$$A_p = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ \frac{1}{3} & 1 & 3 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

價格優先權向量W_p 的完整計算

替代方案數量$n = 3$。

第1 列(汽車)：

$$g_1 = \sqrt[3]{a_{11} \cdot a_{12} \cdot a_{13}} = \sqrt[3]{1 \times 3 \times 5} = \sqrt[3]{15} \approx 2.4662$$

任務：計算第一列的幾何平均值，得出汽車的未歸一化權重。

第2 列(火車)：

$$g_2 = \sqrt[3]{a_{21} \cdot a_{22} \cdot a_{23}} = \sqrt[3]{\tfrac{1}{3} \times 1 \times 3} = \sqrt[3]{1} = 1.0000$$

任務：計算火車的第二列幾何平均值。

第3 列(飛機)：

$$g_3 = \sqrt[3]{a_{31} \cdot a_{32} \cdot a_{33}} = \sqrt[3]{\tfrac{1}{5} \times \tfrac{1}{3} \times 1} = \sqrt[3]{\frac{1}{15}} \approx 0.4055$$

任務：計算飛機的第三列幾何平均值。

歸一化總和：

$$S_g = g_1 + g_2 + g_3 \approx 2.4662 + 1.0000 + 0.4055 = 3.8717$$

任務：將所有幾何平均值加總，以便將權重歸一化使總和$= 1$。

最終歸一化權重：

$$w_{p1} = \frac{g_1}{S_g} \approx \frac{2.4662}{3.8717} \approx 0.64$$

$$w_{p2} = \frac{g_2}{S_g} \approx \frac{1.0000}{3.8717} \approx 0.26$$

$$w_{p3} = \frac{g_3}{S_g} \approx \frac{0.4055}{3.8717} \approx 0.10$$

原因：將每個幾何平均值除以總和，得出最終優先權重。

結果：

$$W_p = \begin{bmatrix} 0.64 \\ 0.26 \\ 0.10 \end{bmatrix}$$

8 舒適度準則矩陣A_c 推導

A_c 的構建

基於舒適度的判斷：

1. 火車比汽車中等重要：$a_{21} = 3 \Rightarrow a_{12} = \frac{1}{3}$
2. 飛機比汽車强烈重要：$a_{31} = 5 \Rightarrow a_{13} = \frac{1}{5}$
3. 飛機比火車中等重要：$a_{32} = 3 \Rightarrow a_{23} = \frac{1}{3}$

倒數及對角線規則得出：

$$A_c = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{5} \\ 3 & 1 & \frac{1}{3} \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

A_c 是A_p 確切的倒數轉置（reciprocal transpose），這在邏輯上是一致的（價格和舒適度的偏好相反）。

舒適度優先權向量W_c 的完整計算

第1 列(汽車)：

$$g_1 = \sqrt[3]{1 \cdot \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{5}} = \sqrt[3]{\frac{1}{15}} \approx 0.4055$$

第2 列(火車)：

$$g_2 = \sqrt[3]{3 \cdot 1 \cdot \tfrac{1}{3}} = \sqrt[3]{1} = 1.0000$$

第3 列(飛機)：

$$g_3 = \sqrt[3]{5 \cdot 3 \cdot 1} = \sqrt[3]{15} \approx 2.4662$$

歸一化總和是相同的：$S_g \approx 3.8717$

$$\begin{aligned} w_{c1} &\approx \frac{0.4055}{3.8717} \approx 0.10 \\ w_{c2} &\approx \frac{1.0000}{3.8717} \approx 0.26 \\ w_{c3} &\approx \frac{2.4662}{3.8717} \approx 0.64 \end{aligned}$$

結果：

$$W_c = \begin{bmatrix} 0.10 \\ 0.26 \\ 0.64 \end{bmatrix}$$

準則重要性矩陣$\widehat{A}$ 推導

矩陣構建推理

兩個準則：$C_1 =$ 價格, $C_2 =$ 舒適度

判斷：價格的重要性是舒適度的兩倍

$$a_{12} = 2, \quad a_{21} = \tfrac{1}{2}, \quad a_{11} = a_{22} = 1$$

$$\widehat{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

優先權重$\widehat{W}$ 計算

$n = 2$，幾何平均值：

$$g_1 = \sqrt{1 \times 2} = \sqrt{2} \approx 1.4142, \quad g_2 = \sqrt{\tfrac{1}{2} \times 1} = \sqrt{0.5} \approx 0.7071$$

$$S_g = 1.4142 + 0.7071 = 2.1213$$

$$\widehat{w}_1 = \frac{1.4142}{2.1213} \approx 0.67, \quad \widehat{w}_2 = \frac{0.7071}{2.1213} \approx 0.33$$

$$\widehat{W} = \begin{bmatrix} 0.67 \\ 0.33 \end{bmatrix}$$

原因：歸一化的權重表明，價格（67

完整AHP 摘要表

Table 4: 完整AHP 矩陣與優先權向量摘要

元件	矩陣	優先權向量	描述
價格準則(A_p, W_p)	$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ \frac{1}{3} & 1 & 3 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.64 \\ 0.26 \\ 0.10 \end{bmatrix}$	因低成本而偏好汽車
舒適度準則(A_c, W_c)	$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{5} \\ 3 & 1 & \frac{1}{3} \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.10 \\ 0.26 \\ 0.64 \end{bmatrix}$	因高舒適度而偏好飛機
準則重要性$(\widehat{A}, \widehat{W})$	$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.67 \\ 0.33 \end{bmatrix}$	價格的重要性是舒適度的兩倍
最終優先權(W_{final})	-	$\begin{bmatrix} 0.46 \\ 0.26 \\ 0.28 \end{bmatrix}$	綜合排名：汽車> 飛機> 火車

最終結論

最終優先權向量$W_{\text{final}} = [0.46, 0.26, 0.28]^T$ 給出整體偏好排名：

- 汽車(46%)：最便宜的選項，其低廉的價格彌補了較低的舒適度。
- 飛機(28%)：最高舒適度，但高昂的價格降低了其吸引力。
- 火車(26%)：在兩個準則上取得平衡，但在表現上不及汽車（價格）和飛機（舒適度）。

這個排名與最初單一準則的結果（飛機> 火車> 汽車）有所不同，證明了AHP 如何整合衝突的準則以達致一個整體的決策。

9 AHP 程序的概括

考慮到準則C，從集合X 中選擇偏好的替代方案x_i 的AHP 程序包含四個連續的階段：

1. 定義層級目標、決策準則$C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ 及替代方案$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$。
2. 計算決策準則集合C 的成對比較矩陣$\widehat{A}$，及相關的優先權向量$\widehat{W}$。
3. 計算替代方案集合X 針對集合C 中每個準則i 的比較矩陣A_i，及相關的優先權向量W_i。
4. 根據替代方案產生的優先權向量W（已考慮所有準則及其相對重要性）對選項進行排名並得出結論。

對於任何包含第i 列及第j 行元素a_{ij} 的成對比較矩陣A，第i 列各變數相對於第j 行變數的成對比較比率均會使用Saaty 等級輸入。比較矩陣A 是一個$n \times n$ 矩陣，其中n 是被比較元素（準則或替代方案）的數量：

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{9.1}$$

構建比較矩陣的規則

以下規則適用於比較矩陣A：

- 對角線的數值$a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ 始終為1。
- 應先填入上三角矩陣的值$a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}, a_{22}, a_{23}, \ldots, a_{2n}$：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ & 1 & \ldots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \end{bmatrix} \tag{9.2}$$

- 對於上三角矩陣的數值：
  - 如果判斷在圖形比較量表上1 的左側打勾，則將實際判斷值置於矩陣A 中。
  - 如果判斷在1 的右側打勾，則將倒數值置於矩陣A 中。
- 下三角矩陣取得上三角矩陣的倒數值：

$$a_{ji} = \frac{1}{a_{ij}} \quad \forall i, j \tag{9.3}$$

完整的比較矩陣為：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \frac{1}{a_{12}} & 1 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_{1n}} & \frac{1}{a_{2n}} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \tag{9.4}$$

符號標記

- X：替代方案集合。
- C：決策準則集合。

- A：所有替代方案X 的成對比較矩陣。
- A_i：所有替代方案X 相對於準則c_i 的成對比較矩陣。
- $\widehat{A}$：決策準則C 的成對比較矩陣。
- W：考慮所有準則的替代方案X 的優先權向量；矩陣A 的歸一化主特徵向量。
- W_i：相對於準則c_i 的替代方案X 的優先權向量；矩陣A_i 的歸一化主特徵向量。
- $\widehat{W}$：決策準則C 的優先權向量；矩陣$\widehat{A}$ 的歸一化主特徵向量。

10 計算優先權向量

從比較矩陣A 推導出優先權向量W 的兩種精確方法是：

1. 特徵向量法（Saaty, 1980）。
2. 幾何平均法（Crawford and Williams, 1985）。

特徵向量法

優先權向量W 被定義為矩陣A 的歸一化主特徵向量。

計算優先權向量W

對於方形$n \times n$ 比較矩陣A，特徵值λ 滿足特徵方程式：

$$|A - \lambda I_n| = 0$$

其中I_n 是$n \times n$ 單位矩陣。這條方程式識別出存在非平凡特徵向量的純量值λ。使用作為例子的成對比較矩陣：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{7} \\ 3 & 1 & \frac{1}{5} \\ 7 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

特徵方程式為：

$$|A - \lambda \cdot I_3| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{vmatrix} 1-\lambda & \frac{1}{3} & \frac{1}{7} \\ 3 & 1-\lambda & \frac{1}{5} \\ 7 & 5 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{10.1}$$

展開行列式得出三次特徵多項式：

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 - 0.61 = 0 \tag{10.2}$$

對於3×3 的互為倒數AHP 矩陣，跡數（trace）等於3，產生$-3\lambda^2$ 項。這個多項式有一個實數的優勢（主）特徵值：

$$\lambda_{\max} = 3.065$$

互為倒數的AHP 矩陣永遠恰好只有一個實數的、正數的主特徵值。對應於$\lambda_{\max} = 3.065$ 的未歸一化特徵向量為：

$$\overline{W} = (0.107,\ 0.248,\ 0.963)^{\mathrm{T}} \tag{10.3}$$

這個向量滿足特徵向量條件$A\overline{W} = \lambda_{\max}\overline{W}$。首先，計算未歸一化特徵向量的總和：

$$\sum \overline{W} = 0.107 + 0.248 + 0.963 = 1.318$$

歸一化確保最終優先權向量總和為1（有效的權重向量）。將特徵向量歸一化：

$$W = \begin{bmatrix} \frac{0.107}{1.318} \\ \frac{0.248}{1.318} \\ \frac{0.963}{1.318} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.081 \\ 0.188 \\ 0.730 \end{bmatrix} \tag{10.4}$$

這結果與來自幾何平均法的優先權向量相符。

成對比較矩陣的特徵值與特徵向量計算

已知交通替代方案的成對比較矩陣：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{7} \\ 3 & 1 & \frac{1}{5} \\ 7 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

1：建立特徵方程式

特徵方程式定義為$A - \lambda I_3 = 0$ 的行列式：

$$|A - \lambda I_3| = 0 \quad \iff \quad \begin{vmatrix} 1-\lambda & \frac{1}{3} & \frac{1}{7} \\ 3 & 1-\lambda & \frac{1}{5} \\ 7 & 5 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{10.5}$$

2：行列式的餘子式展開

我們使用餘子式公式，沿著第一列展開3×3 行列式：

$$\det(M) = m_{11}C_{11} + m_{12}C_{12} + m_{13}C_{13}$$

其中$C_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$ (餘子式)，$M_{ij} =$ 子行列式。

$$\det(A - \lambda I) = (1-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & \frac{1}{5} \\ 5 & 1-\lambda \end{vmatrix} - \frac{1}{3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & \frac{1}{5} \\ 7 & 1-\lambda \end{vmatrix} + \frac{1}{7} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1-\lambda \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

分別計算各個2×2 子行列式：

1. 第一個子行列式：

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & \frac{1}{5} \\ 5 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - \left(\frac{1}{5}\right)(5) = 1 - 2\lambda + \lambda^2 - 1 = \lambda^2 - 2\lambda$$

2. 第二個子行列式：

$$\begin{vmatrix} 3 & \frac{1}{5} \\ 7 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 3(1-\lambda) - \frac{7}{5} = 3 - 3\lambda - 1.4 = 1.6 - 3\lambda$$

3. 第三個子行列式：

$$\begin{vmatrix} 3 & 1-\lambda \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 15 - 7(1-\lambda) = 15 - 7 + 7\lambda = 8 + 7\lambda$$

代回行列式：

$$\begin{aligned} (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda) - \frac{1}{3}(1.6 - 3\lambda) + \frac{1}{7}(8 + 7\lambda) &= 0 \\ (\lambda^2 - 2\lambda - \lambda^3 + 2\lambda^2) - \frac{1.6}{3} + \lambda + \frac{8}{7} + \lambda &= 0 \\ -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 0.61 &= 0 \end{aligned}$$

乘以-1 以得出標準三次多項式：

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 - 0.61 = 0 \tag{10.6}$$

用於三次多項式的牛頓-拉弗森（Newton-Raphson）迭代法

我們解三次特徵方程式：

$$f(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 - 0.61 = 0 \tag{10.7}$$

1：定義函數和一階導數

函數：

$$f(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 - 0.61$$

一階導數（用於牛頓迭代）：

$$f'(\lambda) = 3\lambda^2 - 6\lambda$$

2：牛頓-拉弗森迭代公式

迭代更新規則：

$$\lambda_{n+1} = \lambda_n - \frac{f(\lambda_n)}{f'(\lambda_n)}$$

3：選擇初始猜測值

從AHP 理論得知，優勢特徵值$\lambda_{\max} > 3$。選擇初始值：

$$\lambda_0 = 3.0$$

4：完整迭代計算

第1 次迭代：$n = 0$, $\lambda_0 = 3.0$

$$f(\lambda_0) = (3.0)^3 - 3(3.0)^2 - 0.61 = 27 - 27 - 0.61 = -0.61$$
$$f'(\lambda_0) = 3(3.0)^2 - 6(3.0) = 27 - 18 = 9$$
$$\lambda_1 = 3.0 - \frac{-0.61}{9} = 3.0 + 0.067778 = 3.067778$$

第2 次迭代：$n = 1$, $\lambda_1 = 3.067778$

$$f(\lambda_1) = (3.067778)^3 - 3(3.067778)^2 - 0.61 \approx 28.869 - 28.242 - 0.61 = 0.017$$
$$f'(\lambda_1) = 3(3.067778)^2 - 6(3.067778) \approx 28.242 - 18.407 = 9.835$$
$$\lambda_2 = 3.067778 - \frac{0.017}{9.835} \approx 3.067778 - 0.001729 = 3.066049$$

第3 次迭代：$n = 2$, $\lambda_2 = 3.066049$

$$f(\lambda_2) \approx (3.066049)^3 - 3(3.066049)^2 - 0.61 \approx 0.00012$$
$$f'(\lambda_2) \approx 9.813$$
$$\lambda_3 = 3.066049 - \frac{0.00012}{9.813} \approx 3.066037$$

第4 次迭代：$n = 3$, $\lambda_3 = 3.066037$

$$f(\lambda_3) \approx 0 \quad \text{(已收斂)}$$

5：最終收斂根

$$\lambda_{\max} \approx 3.065$$

這符合AHP 矩陣所需的優勢特徵值。

3：解優勢特徵值（$\lambda_{\max}$）

三次方程式有一個實正根（即AHP 矩陣的優勢特徵值）：

$$\lambda_{\max} \approx 3.065$$

互為倒數的AHP 矩陣永遠恰好只有一個實數的、正數的主特徵值。

4：未歸一化特徵向量計算

解方程式組

$$(A - \lambda_{\max} I_3)\overline{W} = \mathbf{0}.$$

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{7} \\ 3 & 1 & \frac{1}{5} \\ 7 & 5 & 1 \end{bmatrix} - (3.065) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \overline{W} = \mathbf{0}.$$

對應於$\lambda_{\max} = 3.065$ 的未歸一化特徵向量為：

$$\overline{W} = \begin{bmatrix} 0.107 \\ 0.248 \\ 0.963 \end{bmatrix} \tag{10.8}$$

這個向量滿足特徵向量條件$A\overline{W} = \lambda_{\max}\overline{W}$。

透過基本列運算（Elementary Row Operations）解未歸一化特徵向量$\overline{W}$

我們解齊次線性方程組：

$$(A - \lambda_{\max} I_3)\overline{W} = \mathbf{0}$$

已知：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{7} \\ 3 & 1 & \frac{1}{5} \\ 7 & 5 & 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda_{\max} = 3.065$$

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{7} \\ 3 & 1 & \frac{1}{5} \\ 7 & 5 & 1 \end{bmatrix} - 3.065 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \overline{W} = \mathbf{0}$$

1：計算矩陣$A - \lambda_{\max} I_3$

從每個對角線項目減去$\lambda_{\max}$：

$$A - 3.065I_3 = \begin{bmatrix} 1 - 3.065 & \frac{1}{3} & \frac{1}{7} \\ 3 & 1 - 3.065 & \frac{1}{5} \\ 7 & 5 & 1 - 3.065 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.065 & 0.3333 & 0.1429 \\ 3 & -2.065 & 0.2 \\ 7 & 5 & -2.065 \end{bmatrix}$$

該系統變成：

$$\begin{bmatrix} -2.065 & 0.3333 & 0.1429 \\ 3 & -2.065 & 0.2 \\ 7 & 5 & -2.065 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2：寫出增廣矩陣（Augmented Matrix）

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2.065 & 0.3333 & 0.1429 & 0 \\ 3 & -2.065 & 0.2 & 0 \\ 7 & 5 & -2.065 & 0 \end{array}\right]$$

3：將矩陣化簡的基本列運算

列運算1：將第1 列歸一化($R_1 = R_1/(-2.065)$)

$$R_1 : \frac{-2.065}{-2.065} = 1,\ \frac{0.3333}{-2.065} \approx -0.1614,\ \frac{0.1429}{-2.065} \approx -0.0692$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -0.1614 & -0.0692 & 0 \\ 3 & -2.065 & 0.2 & 0 \\ 7 & 5 & -2.065 & 0 \end{array}\right]$$

列運算2：從第2 列消去w_1 ($R_2 = R_2 - 3R_1$)

$$R_2 : 3 - 3(1) = 0,\ -2.065 - 3(-0.1614) = -1.5808,\ 0.2 - 3(-0.0692) = 0.4076$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -0.1614 & -0.0692 & 0 \\ 0 & -1.5808 & 0.4076 & 0 \\ 7 & 5 & -2.065 & 0 \end{array}\right]$$

列運算3：從第3 列消去w_1 ($R_3 = R_3 - 7R_1$)

$$R_3 : 7 - 7(1) = 0,\ 5 - 7(-0.1614) = 6.1298,\ -2.065 - 7(-0.0692) = -1.5806$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -0.1614 & -0.0692 & 0 \\ 0 & -1.5808 & 0.4076 & 0 \\ 0 & 6.1298 & -1.5806 & 0 \end{array}\right]$$

列運算4：將第2 列歸一化($R_2 = R_2/(-1.5808)$)

$$R_2 : \frac{-1.5808}{-1.5808} = 1,\ \frac{0.4076}{-1.5808} \approx -0.2578$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -0.1614 & -0.0692 & 0 \\ 0 & 1 & -0.2578 & 0 \\ 0 & 6.1298 & -1.5806 & 0 \end{array}\right]$$

列運算5：從第3 列消去w_2 ($R_3 = R_3 - 6.1298R_2$)

$$R_3 : 6.1298 - 6.1298(1) = 0,\ -1.5806 - 6.1298(-0.2578) \approx 0$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -0.1614 & -0.0692 & 0 \\ 0 & 1 & -0.2578 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

4：解出簡化的系統

簡化的方程式：

1. $w_1 - 0.1614w_2 - 0.0692w_3 = 0$
2. $w_2 - 0.2578w_3 = 0 \implies w_2 = 0.2578w_3$

將$w_2 = 0.2578w_3$ 代入方程式1：

$$w_1 - 0.1614(0.2578w_3) - 0.0692w_3 = 0$$

$$w_1 - 0.0416w_3 - 0.0692w_3 = 0 \implies w_1 = 0.1108w_3$$

5：設定自由變數並計算$\overline{W}$

設自由變數$w_3 = 0.963$（這個AHP 問題的標準縮放）：

$$w_2 = 0.2578(0.963) \approx 0.248$$

$$w_1 = 0.1108(0.963) \approx 0.107$$

最終的未歸一化特徵向量

$$\overline{W} = \begin{bmatrix} 0.107 \\ 0.248 \\ 0.963 \end{bmatrix}$$

5：特徵向量歸一化

首先，計算未歸一化特徵向量成分的總和：

$$\sum \overline{W} = 0.107 + 0.248 + 0.963 = 1.318$$

原因：歸一化保證了優先權向量的總和為1（有效的權重向量）。透過除以總和來歸一化每個成分：

$$W = \begin{bmatrix} \frac{0.107}{1.318} \\ \frac{0.248}{1.318} \\ \frac{0.963}{1.318} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.081 \\ 0.188 \\ 0.730 \end{bmatrix} \tag{10.9}$$

最終結果

交通替代方案的歸一化優先權重向量為：

$$W = \left[\, 0.081 \text{ (汽車)},\ 0.188 \text{ (火車)},\ 0.730 \text{ (飛機)} \,\right]^{\mathrm{T}}$$

計算一致性指標

一致性指標量化了成對判斷的邏輯一致性：

$$CI = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1} \tag{10.10}$$

其中：

- 比較矩陣的維度
- 矩陣的主特徵值

原因：代表完美一致的判斷；較高的數值表示不一致。

對於範例矩陣：

$$CI = \frac{3.065 - 3}{3 - 1} = \frac{0.065}{2} = 0.0325 \approx 0.033$$

一致性比率CR 比較CI 和隨機一致性指標RI：

$$CR = \frac{CI}{RI} \tag{10.11}$$

原因：$CR < 0.1$ (10%) 是可接受一致性的標準閾值（Saaty, 2006）。對於$n = 3$，$RI = 0.58$：

$$CR = \frac{0.033}{0.58} \approx 0.057 < 0.1$$

結論：判斷矩陣在統計上是一致的。

隨機一致性指標RI

Table 5: 作為比較次數n 函數的隨機一致性指標RI

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
RI	0	0	0.58	0.89	1.12	1.24	1.32	1.41	1.45	1.49

幾何平均法

推導優先權向量W 的另一種精確方法是Crawford 和Williams (1985) 提出的幾何平均法。使用這種方法，優先權向量W 的每個元素w_i 都被決定為各列元素的幾何平均值除以歸一化項，如(10.12) 所示。

$$w_i = \frac{\left(\prod_{j=1}^{n} a_{ij}\right)^{1/n}}{\sum_{k=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{n} a_{kj}\right)^{1/n}} \tag{10.12}$$

其中：

- n 是$n \times n$ 矩陣A 的秩（rank）
- $\prod_{j=1}^{n} a_{ij} = a_{i1} \cdot a_{i2} \cdots a_{in}$

我們將此方法應用於相同的比較矩陣

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{7} \\ 3 & 1 & \frac{1}{5} \\ 7 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

與(2.3) 中相同。與比較矩陣A 相關的優先權向量的第一個權重因子w_1 為

$$w_1 = \frac{\left(1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{7}\right)^{1/3}}{\left(1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{7}\right)^{1/3} + \left(3 \cdot 1 \cdot \frac{1}{5}\right)^{1/3} + (7 \cdot 5 \cdot 1)^{1/3}} = 0.081 \tag{10.13}$$

權重因子w_2 和w_3 也以相同方式推導：

$$w_2 = \frac{\left(3 \cdot 1 \cdot \frac{1}{5}\right)^{1/3}}{\left(1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{7}\right)^{1/3} + \left(3 \cdot 1 \cdot \frac{1}{5}\right)^{1/3} + (7 \cdot 5 \cdot 1)^{1/3}} = 0.188 \tag{10.14}$$

$$w_3 = \frac{(7 \cdot 5 \cdot 1)^{1/3}}{\left(1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{7}\right)^{1/3} + \left(3 \cdot 1 \cdot \frac{1}{5}\right)^{1/3} + (7 \cdot 5 \cdot 1)^{1/3}} = 0.730 \tag{10.15}$$

請注意，權重因子的總和$\sum_{i=1}^{n} w_i$ 等於1（考慮四捨五入）：

$$\sum_{i=1}^{3} w_i = 0.081 + 0.188 + 0.730 = 1 \tag{10.16}$$

結果正好與(10.9) 中表達的優先權向量完全相同。

Table 6: 幾何平均法計算摘要

權重	分子(幾何平均數)	分母(平均數總和)	最終數值
w_1	$(1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{7})^{1/3}$	S	0.081
w_2	$(3 \cdot 1 \cdot \frac{1}{5})^{1/3}$	S	0.188
w_3	$(7 \cdot 5 \cdot 1)^{1/3}$	S	0.730
其中$S = \sum_{i=1}^{3}(\prod_{j=1}^{3} a_{ij})^{1/3}$			$\sum w_i = 1$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{7} \\ 3 & 1 & \frac{1}{5} \\ 7 & 5 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \quad W = \begin{bmatrix} 0.081 \\ 0.188 \\ 0.730 \end{bmatrix}$$

Figure 4: 幾何平均法在比較矩陣上的應用

Table 7: AHP 特徵向量與一致性計算摘要

參數	數值
矩陣維度n	3
主特徵值$\lambda_{\max}$	3.065
一致性指標CI	0.033
隨機指標RI (對於$n = 3$)	0.58
一致性比率CR	0.057
一致性檢查	可接受($CR < 0.1$)
最終優先權向量W	$\begin{bmatrix} 0.081 \\ 0.188 \\ 0.730 \end{bmatrix}$

Table 8: 核心AHP 公式摘要

組成部分	公式	描述
比較矩陣	$a_{ji} = 1/a_{ij}$	倒數對稱性
特徵值問題	$\lvert A - \lambda I_n \rvert = 0$	特徵方程式
一致性指標	$CI = \frac{\lambda_{\max} - n}{n-1}$	測量判斷的一致性
一致性比率	$CR = \frac{CI}{RI}$	與隨機矩陣比較
幾何平均數	$w_i = \frac{\sqrt[n]{\prod_j a_{ij}}}{\sum_k \sqrt[n]{\prod_j a_{kj}}}$	簡化優先權計算
最終優先權	$W_{\text{final}} = \widehat{w}_1 W_p + \widehat{w}_2 W_c$	準則向量的加權組合