

香港中文大學
數學系
矩陣特徵值與特徵向量練習

Example 1. 設

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}.$$

A 的特徵多項式 (characteristic polynomial) 為

$$f(\lambda) = \det(\lambda I_3 - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & 1 \\ -1 & \lambda & -1 \\ -4 & 4 & \lambda - 5 \end{vmatrix}.$$

我們沿著第一列使用餘子式展開 (co-factor expansion) 來計算行列式：

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A) &= (\lambda - 1) \cdot \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 4 & \lambda - 5 \end{pmatrix} - (-2) \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -4 & \lambda - 5 \end{pmatrix} + 1 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & \lambda \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \\ &= (\lambda - 1)[\lambda(\lambda - 5) - (-1)(4)] + 2[(-1)(\lambda - 5) - (-1)(-4)] + 1[(-1)(4) - \lambda(-4)] \\ &= (\lambda - 1)(\lambda^2 - 5\lambda + 4) + 2(-\lambda + 5 - 4) + (-4 + 4\lambda) \\ &= (\lambda - 1)(\lambda - 1)(\lambda - 4) + 2(-\lambda + 1) + 4\lambda - 4 \\ &= (\lambda^2 - 2\lambda + 1)(\lambda - 4) - 2\lambda + 2 + 4\lambda - 4 \\ &= \lambda^3 - 4\lambda^2 - 2\lambda^2 + 8\lambda + \lambda - 4 + 2\lambda - 2 \\ &= \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6. \end{aligned}$$

因此，特徵多項式為 $f(\lambda) = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6$ 。

Example 2. 考慮例子1的矩陣。其特徵多項式為

$$f(\lambda) = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6.$$

$f(\lambda)$ 可能的整數根為 $\pm 1, \pm 2, \pm 3$ 及 ± 6 。將這些數值代入 $f(\lambda)$ ，我們發現 $f(1) = 0$ ，因此 $\lambda = 1$ 是 $f(\lambda)$ 的一個根。故 $(\lambda - 1)$ 是 $f(\lambda)$ 的一個因式。將 $f(\lambda)$ 除以 $(\lambda - 1)$ ，我們得出

$$f(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 5\lambda + 6).$$

對 $\lambda^2 - 5\lambda + 6$ 進行因式分解，我們得到

$$f(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3).$$

因此 A 的特徵值 (eigenvalues) 為

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3.$$

為了找出與 $\lambda_1 = 1$ 相關的特徵向量 (eigenvector) \mathbf{x}_1 ，我們建立以下線性方程組：

$$(\mathbf{1}I_3 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0},$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} - 1 & -2 & 1 \\ -1 & \mathbf{1} & -1 \\ -4 & 4 & \mathbf{1} - 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

或

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -4 & 4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

其解為

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}r \\ \frac{1}{2}r \\ r \end{bmatrix}$$

對於任何實數 r 。因此，取 $r = 2$ ，

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

為與 $\lambda_1 = 1$ 相關的 A 的特徵向量。

為了找出與 $\lambda_2 = 2$ 相關的特徵向量，我們建立以下線性方程組：

$$(2I_3 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0},$$

$$\begin{bmatrix} 2-1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -4 & 4 & 2-5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

或

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -4 & 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

其解為

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}r \\ \frac{1}{4}r \\ r \end{bmatrix}$$

對於任何實數 r 。因此，取 $r = 4$ ，

$$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

為與 $\lambda_2 = 2$ 相關的 A 的特徵向量。

為了找出與 $\lambda_3 = 3$ 相關的特徵向量，我們建立以下線性方程組：

$$(3I_3 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0},$$

並發現其解為

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{4}r \\ \frac{1}{4}r \\ r \end{bmatrix}$$

對於任何實數 r 。因此，取 $r = 4$ ，

$$\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

為與 $\lambda_3 = 3$ 相關的 A 的特徵向量。

摘要表

| 特徵值 | 對應的特徵向量 |
|-----------------|---|
| $\lambda_1 = 1$ | $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ |
| $\lambda_2 = 2$ | $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ |
| $\lambda_3 = 3$ | $\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ |

Example 3. 對以下矩陣進行對角化 (diagonalize) (如可行的話)。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

亦即，尋找一個可逆矩陣 (invertible matrix) P 及一個對角矩陣 (diagonal matrix) D ，使得 $A = PDP^{-1}$ 。

解答

步驟1：找出 A 的特徵值。特徵方程式涉及一個可被因式分解的三次多項式：

$$0 = \det(\lambda I_3 - A) = \lambda^3 + 3\lambda^2 - 4 = (\lambda - 1)(\lambda + 2)^2$$

特徵值為 $\lambda = 1$ 及 $\lambda = -2$ 。

步驟2：找出 A 的三個線性獨立 (linearly independent) 的特徵向量。這是關鍵的步驟。如果失敗， A 則無法被對角化。

1. 對於 $\lambda = 1$ ：我們必須解出齊次方程組 (homogeneous system) $(1I_3 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 或

$$\begin{bmatrix} 0 & -3 & -3 \\ 3 & 6 & 3 \\ -3 & -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

現在，

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

2. 對於 $\lambda = -2$ ：我們必須解出齊次方程組 $(-2I_3 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 或

$$\begin{bmatrix} -3 & -3 & -3 \\ 3 & 3 & 3 \\ -3 & -3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

現在，

$$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

因此 $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ 是一個線性獨立集（請自行驗證）。

步驟3：使用**步驟2**的向量構建 P 。使用在**步驟2**選擇的順序來組成

$$P = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

步驟4：使用對應的特徵值構建 D 。特徵值的順序須與為 P 選擇的順序相符。特徵值 $\lambda = -2$ 使用兩次，每次對應一個與 $\lambda = -2$ 相關的特徵向量：

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

讓我們檢查 P 和 D 是否真的成立。為了避免混淆，我們只需驗證 $AP = PD$ 。當 P 是可逆時，這等同於 $A = PDP^{-1}$ 。我們計算：

$$AP = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

$$PD = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

對角化摘要

| 特徵值 | 特徵向量 | 在 P / D 中的位置 |
|------------------|---|----------------|
| $\lambda_1 = 1$ | $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ | 第1行 / D_{11} |
| $\lambda_2 = -2$ | $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ | 第2行 / D_{22} |
| $\lambda_3 = -2$ | $\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ | 第3行 / D_{33} |

對角化結果：

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$