

香港中文大學
數學系
圖論練習

問題1：在一個無向圖（undirected graph）中，如果一個頂點有4條邊連接到它，那麼它的度數（degree）是多少？

解答：度數為4。

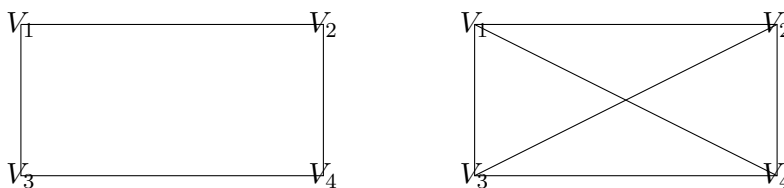
在無向圖中，頂點的度數就是與其相連（關聯）的邊的數量。

問題2：在一個有6個頂點的無向圖中，一個頂點的最大度數可以是6嗎？為甚麼可以或為甚麼不可以？

解答：不可以是6。最大可能度數為5。

為甚麼？一個頂點不能與自己相連（在簡單圖中），而且它最多只能與所有其他頂點相連。如果總共有6個頂點，一個頂點最多可以與其他5個頂點相連。所以，最大度數 = $n - 1 = 5$ 。

正則圖（Regular Graph）：每個頂點 x 都具有相同/相等度數的圖。一個 k -正則圖代表每個頂點都有 k 條邊。每一個完全圖（complete graph） K_n 都是一個 $(n - 1)$ -正則圖，這意味著其度數為 $n - 1$ 。



正則圖

問題3：對於 $V = \{1, 2, 3, 4\}$ ，找出 K_4 中所有的無序對（unordered pairs）及邊的總數。

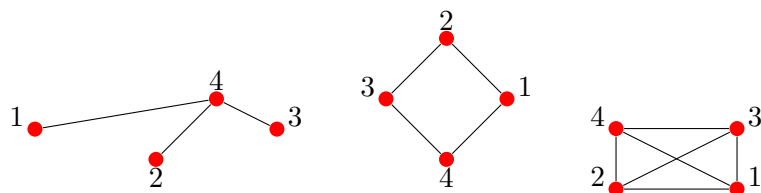
解答：無序對 = $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}$

總計 = 6 條邊。公式檢查： $\frac{n(n-1)}{2} = \frac{4 \times 3}{2} = 6$

問題4：具有邊 $E = \{\{A, B\}, \{B, C\}, \{C, D\}, \{D, A\}\}$ 的圖。求該圖的階數（order）和大小（size），並確定每個頂點的度數。

解答：這是一個四邊形的環（square cycle） C_4 。度數： $\deg(A) = 2, \deg(B) = 2, \deg(C) = 2, \deg(D) = 2$

問題5：使用以下無向圖來寫出對應的三個鄰接矩陣（adjacency matrices）。圖 G 的鄰接矩陣是一個方陣，其中每個頂點 v 都有對應的行和列。如果兩個頂點 v, u 共用一條邊，則對應位置為1，否則為0。



$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

問題6：使用以下鄰接矩陣來畫出一個無向圖。

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$