香港中文大學
數學系
線性一階常微分方程解練習

1 一階線性方程

我們學過，對於未知函數$x = x(t)$，一階線性非齊次常微分方程(ODE) 的標準形式為

$$\dot{x} + p(t)x = q(t). \tag{1.1}$$

（確切地說，我們要求$q(t)$ 不恆等於零。）

對於未知函數$x = x(t)$，一階線性齊次ODE 的標準形式為

$$\dot{x} + p(t)x = 0. \tag{1.2}$$

我們稱(1.2) 為非齊次方程(1.1) 的相伴齊次方程（associated homogeneous equation）。在(1.2) 中，輸入訊號恆為零。我們稱之為零訊號（null signal）。它對應於讓系統在沒有任何外部「干擾」的孤立狀態下演變。

- 以銀行的例子來說：如果沒有存款也沒有提款，輸入即為0。

2 齊次方程的解

齊次線性方程(1.2) 是可分離變量的。我們可按如下方式求解：

- 分離變量：
$$\frac{dx}{x} = -p(t)\,dt.$$
- 積分：
$$\ln|x| = -\int p(t)\,dt + c_1.$$
（我們使用c_1 以便將C 保留給後續使用。）
- 取指數：
$$|x| = e^{c_1}e^{-\int p(t)\,dt}.$$
- 將e^{c_1} 重新命名為C：
$$|x| = Ce^{-\int p(t)\,dt}, \quad C > 0.$$
- 拿掉絶對值，並還原丟失的解$x(t) = 0$：這給出了(1.2) 的通解：

$$x(t) = Ce^{-\int p(t)\,dt}, \quad C \in \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

一個實用的符號標記法是選擇方程(1.2) 的一個特解，並將其稱為$x_h(t)$。那麼，解(2.1) 顯示該方程的通解為

$$x(t) = Cx_h(t). \tag{2.2}$$

這裡有一個微妙之處：公式(2.2) 要求我們選擇一個解來命名為x_h，但選擇哪一個並不重要。我們可以略顯笨拙地將此表述為「選擇一個任意的特解」。一個常見的選擇是將參數設為$C = 1$，但這並非必需。

例子1

解$\dot{x} + 2tx = 0$。

解答

- 分離變量：
$$\frac{dx}{x} = -2t\,dt.$$
- 積分：
$$\ln|x| = -\int 2t\,dt = -t^2 + c_1.$$
- 取指數並將e^{c_1} 替換為C：
$$|x| = e^{c_1}e^{-t^2} = Ce^{-t^2}.$$
- 拿掉絕對值並還原丟失的解：
$$x(t) = Ce^{-t^2}.$$

在這個例子中，x_h 一個明顯的選擇是$x_h(t) = e^{-t^2}$。很明顯，此例子的通解為
$$x(t) = Cx_h(t), \quad C \in \mathbb{R}.$$

3 使用積分因子求解非齊次ODE

我們從積分因子公式開始：非齊次一階線性ODE (1.1)（即$\dot{x} + p(t)x = q(t)$）的通解為
$$x(t) = \frac{1}{u(t)}\left(\int u(t)q(t)\,dt + C\right), \quad 其中u(t) = e^{\int p(t)\,dt}. \tag{3.1}$$

函數u 稱為積分因子（integrating factor）。

這個源自歐拉（Euler）的方法很容易應用。我們通過樂觀預期法推導它，也就是說，我們引入一個積分因子u 並希望它能幫助我們。

證明： 我們從微分的乘積法則開始
$$\frac{d}{dt}(ux) = u\dot{x} + \dot{u}x$$
以及方程(1.1)：
$$\dot{x} + p(t)x = q(t).$$
將方程兩邊同乘某個函數$u(t)$，其值我們稍後再決定：
$$u\dot{x} + upx = uq. \tag{3.2}$$

為了能夠應用乘積法則，我們希望等式左邊的總和具有$\frac{d}{dt}(ux) = u\dot{x} + \dot{u}x$ 的形式。可能有許多函數u 能使左邊具有這個形式；我們只需要找到其中一個。為此，請注意

$$\frac{d}{dt}(ux) = u\dot{x} + upx \quad \Leftrightarrow \quad u\dot{x} + \dot{u}x = u\dot{x} + upx \quad \Leftrightarrow \quad \dot{u} = up.$$

最後這條方程是一個對於未知函數u 可分離變量的ODE：

$$\frac{du}{u} = p(t)\,dt$$

因此：

$$\begin{aligned} \ln|u| &= \int p(t)\,dt \\ u &= e^{\int p(t)\,dt}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

請記住，我們只需要尋找一個u，因此在方程(3.3) 中，對$p(t)$ 的反導數的任何選擇都是可行的。現在將(3.2) 左邊替換為$\frac{d}{dt}(ux)$ 並求解x：

$$\begin{aligned} u\dot{x} + upx &= uq \\ \frac{d}{dt}(ux) &= uq \\ u(t)x(t) &= \int u(t)q(t)\,dt + c \\ x(t) &= \frac{1}{u(t)}\left(\int u(t)q(t)\,dt + c\right). \end{aligned}$$

這最後一條方程式正好就是我們想要證明的公式(3.1)。

例子2

使用積分因子法求解ODE $\dot{x} + 2x = e^{3t}$。

解答 在你確定自己能在任何情況下重新推導出(3.1) 之前，值得在給定的微分方程上練習積分因子法。（在最後，我們將展示直接代入(3.1) 的解法。）

將兩邊乘以u：

$$u\dot{x} + 2u(t)x(t) = u(t)\cdot e^{3t}. \tag{3.4}$$

接下來，找一個積分因子u 使左邊等於$\frac{d}{dt}(ux)$（這又等於$u\dot{x} + \dot{u}x$）。

$$\begin{aligned} u\dot{x} + \dot{u}x &= u\dot{x} + 2ux \\ \Rightarrow \quad \dot{u} &= 2u \\ u(t) &= e^{2t} \quad \text{（我們選擇任何一個可行的}u\text{）。} \end{aligned}$$

現在將$u(t) = e^{2t}$ 代入(3.4) 中，然後將左邊替換為$\frac{d}{dt}(ux)$ 並求解x。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(e^{2t}x) &= e^{2t}e^{3t} \\ \Rightarrow \quad e^{2t}x &= \frac{1}{5}e^{5t} + C \quad \text{（對前面的方程積分）} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = \frac{1}{5}e^{3t} + Ce^{-2t} \quad （求解x(t)）。$$

以下展示使用(3.1) 直接求解的相同過程。

- 積分因子：$u(t) = e^{\int 2\,dt} = e^{2t}$（選擇任何一種可能性）。
- 求解：

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{u(t)}\left(\int u(t)e^{3t}\,dt + C\right) \\ &= e^{-2t}\int e^{5t}\,dt \\ &= e^{-2t}\left(\frac{1}{5}e^{5t} + C\right) \\ &= \frac{1}{5}e^{3t} + Ce^{-2t}. \end{aligned}$$

4 比較積分因子u 和x_h

回顧在第2 節中，我們固定了齊次方程(1.2) 的一個解並將其稱為x_h。x_h 的公式為

$$x_h(t) = e^{-\int p(t)\,dt},$$

我們可以在這裡為反導數選擇任何一種選項。將這與積分因子的公式作比較

$$u = e^{\int p(t)\,dt}$$

我們得到了這兩個函數之間的以下關係式：

$$x_h(t) = \frac{1}{u(t)}.$$

例子3

解ODE

$$\frac{dy}{dx} - y = e^{3x}.$$

解答

- 確定標準形式的係數：該ODE 為$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$，其中$p(x) = -1,\ q(x) = e^{3x}$。計算積分因子$\mu(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{\int -1dx} = e^{-x}$。
- 將ODE 兩邊乘以積分因子：

  $$e^{-x}\frac{dy}{dx} - e^{-x}y = e^{2x}$$

  將左邊重寫為乘積的導數：

  $$\frac{d}{dx}\left(e^{-x}y\right) = e^{2x}$$

- 對兩邊關於x 求積分：

$$e^{-x}y = \int e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x} + C$$

- 求解未知函數$y(x)$：
  兩邊同乘e^x 以分離出y：

$$y = e^x\left(\frac{1}{2}e^{2x} + C\right)$$

練習

1. 解ODE：

$$y' + y = xe^{-x} + 1.$$

2. 對於$t > 0$，求$y(t)$ 的初值問題：

$$\begin{cases} ty' + 2y = \dfrac{\sin t}{t} \\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

練習

1. 解ODE：

$$y' + y = xe^{-x} + 1.$$

解答

- 確定標準形式的係數：該ODE 為$y' + p(x)y = q(x)$，其中$p(x) = 1,\ q(x) = xe^{-x} + 1$。計算積分因子$\mu(x) = e^{\int 1dx} = e^x$。
- 將ODE 兩邊乘以積分因子：

$$e^x y' + e^x y = x + e^x$$

將左邊重寫為乘積的導數：

$$\frac{d}{dx}\left(e^x y\right) = x + e^x$$

- 對兩邊關於x 求積分：

$$e^x y = \int (x + e^x)\, dx = \frac{1}{2}x^2 + e^x + C$$

- 求解未知函數$y(x)$：兩邊同除以e^x 以分離出y：

$$y = \frac{1}{2}x^2 e^{-x} + 1 + Ce^{-x}$$

2. 對於$t > 0$，求$y(t)$ 的初值問題：

$$\begin{cases} ty' + 2y = \dfrac{\sin t}{t} \\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

解答

- 將ODE 重寫為標準形式並計算積分因子：除以t：$y' + \frac{2}{t}y = \frac{\sin t}{t^2}$，其中$p(t) = \frac{2}{t},\ q(t) = \frac{\sin t}{t^2}$。積分因子：$\mu(t) = e^{\int \frac{2}{t}dt} = e^{2\ln t} = t^2$。
- 將ODE 兩邊乘以積分因子：

$$t^2 y' + 2ty = \sin t$$

將左邊重寫為乘積的導數：

$$\frac{d}{dt}\left(t^2 y\right) = \sin t$$

- 對兩邊關於t 求積分：

$$t^2 y = \int \sin t dt = -\cos t + C$$

- 求解$y(t)$ 並代入初始條件：通解：$y = \frac{-\cos t + C}{t^2}$。代入$t = \frac{\pi}{2}, y = 0$：$0 = \frac{0 + C}{(\pi/2)^2} \implies C = 0$。特解：$y = -\frac{\cos t}{t^2}$。