

香港中文大學
數學系
二階線性微分方程練習

1 二階線性微分方程

二階線性微分方程定義為具有以下形式的方程

$$P(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = G(x) \quad (1.1)$$

其中 P, Q, R, G 皆為於公共區間上連續的函數。本筆記主要探討方程(1.1)的定義域中所有 x 皆滿足 $G(x) = 0$ 的情況。這類方程稱為齊次線性微分方程，其標準形式為

$$P(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = 0. \quad (1.2)$$

如果對於至少一個 x ， $G(x) \neq 0$ ，則方程(1.1)是非齊次的，這將在附加主題：非齊次線性方程中討論。有兩個基本結果使得求解齊次線性方程成為可能。第一個是疊加原理（superposition principle），它指出解的線性組合也是解：

Theorem 1. 如果 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是線性齊次方程(1.2)的解，且 c_1, c_2 為任意常數，那麼函數

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

也是方程(1.2)的解。

Proof. 因為 y_1 和 y_2 滿足方程(1.2)，我們得到

$$P(x)y_1'' + Q(x)y_1' + R(x)y_1 = 0$$

以及

$$P(x)y_2'' + Q(x)y_2' + R(x)y_2 = 0.$$

利用微分的線性特性，將 $y = c_1y_1 + c_2y_2$ 代入方程(1.2)的左邊：

$$\begin{aligned} P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y &= P(x)(c_1y_1 + c_2y_2)'' + Q(x)(c_1y_1 + c_2y_2)' + R(x)(c_1y_1 + c_2y_2) \\ &= P(x)(c_1y_1'' + c_2y_2'') + Q(x)(c_1y_1' + c_2y_2') + R(x)(c_1y_1 + c_2y_2) \\ &= c_1 [P(x)y_1'' + Q(x)y_1' + R(x)y_1] + c_2 [P(x)y_2'' + Q(x)y_2' + R(x)y_2] \\ &= c_1(0) + c_2(0) = 0. \end{aligned}$$

因此， $y = c_1y_1 + c_2y_2$ 滿足方程(1.2)。 □

第二個關鍵結果利用線性獨立的解來表徵通解（在進階課程中證明）。如果在一個區間上，兩個函數中沒有一個是另一個的常數倍，則這兩個函數在該區間上是線性獨立（linearly independent）的。例如， $f(x) = x^2$ 和 $g(x) = 5x^2$ 是線性相關的，而 $f(x) = e^x$ 和 $g(x) = xe^x$ 則是線性獨立的。

Theorem 2. 如果 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是方程(1.2)兩個線性獨立的解，且定義域中所有 x 皆滿足 $P(x) \neq 0$ ，那麼方程(1.2)的通解為

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

其中 c_1, c_2 為任意常數。

這個定理很基礎：如果已知兩個線性獨立的解，那麼方程的每一個解都可以表示為它們的線性組合。對於一般的係數函數 P, Q, R ，尋找特解並非易事。然而，常係數齊次線性方程的情況是完全可解的。這些方程的形式為

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (1.3)$$

其中 a, b, c 為常數，且 $a \neq 0$ 。為了解方程(1.3)，我們尋找形式為 $y = e^{rx}$ 的解，其中 r 為常數。這種形式的動機在於 e^{rx} 的導數是其本身的常數倍： $y' = re^{rx}$ 且 $y'' = r^2e^{rx}$ 。將這些代入方程(1.3)中得到

$$ar^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0.$$

由於對於所有的實數 x ， $e^{rx} \neq 0$ ，這可以簡化為輔助（特徵）方程

$$ar^2 + br + c = 0. \quad (1.4)$$

這是一個代數方程，透過將微分方程中的 y'' 替換為 r^2 、 y' 替換為 r 、 y 替換為1而推導出來。方程(1.4)的根可以透過因式分解或二次公式求得：

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \quad (1.5)$$

通解的形式取決於判別式 $\Delta = b^2 - 4ac$ 。

情況1： $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ （相異實根）

當判別式大於零時，輔助方程有兩個相異的實根 $r_1 \neq r_2$ 。函數 $y_1 = e^{r_1x}$ 和 $y_2 = e^{r_2x}$ 是線性獨立的（其中一個不是另一個的常數倍）。根據定理4，方程(1.3)的通解為：

Theorem 3. 如果 $ar^2 + br + c = 0$ 的根 r_1, r_2 為相異實根，那麼 $ay'' + by' + cy = 0$ 的通解為

$$y = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x}.$$

Example 4. 解 $y'' + y' - 6y = 0$ 。

解答：

1. 輔助方程： $r^2 + r - 6 = 0$ 。因式分解： $(r-2)(r+3) = 0$ ，所以根為 $r_1 = 2, r_2 = -3$ 。
通解：根據相異根公式，

$$y = c_1e^{2x} + c_2e^{-3x}.$$

Example 5. 解 $3\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - y = 0$ 。

解答：

1. 輔助方程： $3r^2 + r - 1 = 0$ 。使用二次公式：

$$r = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(3)(-1)}}{2(3)} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{6}.$$

這些根為相異實根（ $\Delta = 1 + 12 = 13 > 0$ ）。2. 通解：

$$y = c_1e^{\left(\frac{-1+\sqrt{13}}{6}\right)x} + c_2e^{\left(\frac{-1-\sqrt{13}}{6}\right)x}.$$

情況2： $\Delta = 0$ （重實根）

當 $\Delta = 0$ 時，輔助方程有一個重實根 $r = -\frac{b}{2a}$ 。標準解 $y_1 = e^{rx}$ 是一個解；我們驗證 $y_2 = xe^{rx}$ 是一個第二個線性獨立解：

$$\begin{aligned} ay_2'' + by_2' + cy_2 &= a(2re^{rx} + r^2xe^{rx}) + b(e^{rx} + rxe^{rx}) + cxe^{rx} \\ &= (2ar + b)e^{rx} + (ar^2 + br + c)xe^{rx}. \end{aligned}$$

由於 $r = -\frac{b}{2a}$ ，故 $2ar + b = 0$ ；又因為 r 是輔助方程的根，故 $ar^2 + br + c = 0$ 。因此 $y_2 = xe^{rx}$ 滿足微分方程。透過線性獨立性，通解為：

$$y = c_1e^{rx} + c_2xe^{rx}.$$

Theorem 6. 如果輔助方程 $ar^2 + br + c = 0$ 有一個重實根 r ，那麼 $ay'' + by' + cy = 0$ 的通解為

$$y = c_1e^{rx} + c_2xe^{rx}.$$

Example 7. 解 $4y'' + 12y' + 9y = 0$ 。

解答：

1. 輔助方程： $4r^2 + 12r + 9 = 0$ 。因式分解： $(2r + 3)^2 = 0$ ，所以重根為 $r = -\frac{3}{2}$ 。2. 通解：根據重根公式，

$$y = c_1e^{-3x/2} + c_2xe^{-3x/2}.$$

情況3： $\Delta < 0$ （複數共軛根）

當 $\Delta < 0$ 時，輔助方程有複數共軛根 $r_1 = \alpha + i\beta$ 及 $r_2 = \alpha - i\beta$ ，其中

$$\alpha = -\frac{b}{2a}, \quad \beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}.$$

利用歐拉公式 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ ，可將複數解重寫為實值解：

$$\begin{aligned} y &= C_1e^{(\alpha+i\beta)x} + C_2e^{(\alpha-i\beta)x} \\ &= e^{\alpha x} [C_1(\cos \beta x + i \sin \beta x) + C_2(\cos \beta x - i \sin \beta x)] \\ &= e^{\alpha x} [(C_1 + C_2) \cos \beta x + i(C_1 - C_2) \sin \beta x]. \end{aligned}$$

令 $c_1 = C_1 + C_2$ 及 $c_2 = i(C_1 - C_2)$ （實數常數），通解變為：

$$y = e^{\alpha x} (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x).$$

Theorem 8. 如果 $ar^2 + br + c = 0$ 的根為複數共軛 $r = \alpha \pm i\beta$ ，那麼 $ay'' + by' + cy = 0$ 的通解為

$$y = e^{\alpha x} (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x).$$

Example 9. 解 $y'' - 6y' + 13y = 0$ 。

解答：

1. 輔助方程： $r^2 - 6r + 13 = 0$ 。利用二次公式：

$$r = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 52}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2} = 3 \pm 2i.$$

在此處， $\alpha = 3$, $\beta = 2$ 。2. 通解：

$$y = e^{3x} (c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x).$$

初值與邊值問題

二階線性微分方程的初值問題 (initial-value problem) 包括尋找一個解 $y(x)$ ，它不僅滿足微分方程，也滿足同一點 x_0 的兩個初始條件：

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1,$$

其中 y_0, y_1 為已知常數。如果係數 $P(x), Q(x), R(x), G(x)$ 在包含 x_0 的區間上是連續的，且在該處 $P(x) \neq 0$ ，則存在唯一性定理保證這個問題只有唯一解。而邊值問題 (boundary-value problem) 需要一個滿足在兩個不同點 x_0 和 x_1 的條件的解：

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1.$$

與初值問題不同，邊值問題並不一定有一個唯一解（它們可能無解、有無數個解，或只有一個解）。

初值問題例子

Example 10. 解初值問題：

$$y'' + y' - 6y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

逐步解答：

1. 通解（來自例子1）：

輔助方程為 $r^2 + r - 6 = 0$ ，其根為 $r_1 = 2, r_2 = -3$ 。通解為：

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}.$$

2. 解的導數：

對通解進行微分，以應用 $y'(0)$ 的初始條件：

$$y'(x) = 2c_1 e^{2x} - 3c_2 e^{-3x}.$$

3. 應用初始條件：

- $y(0) = 1$ ：將 $x = 0$ 代入 $y(x)$ 中：

$$c_1 e^0 + c_2 e^0 = c_1 + c_2 = 1. \tag{1.6}$$

- $y'(0) = 0$: 將 $x = 0$ 代入 $y'(x)$ 中 :

$$2c_1e^0 - 3c_2e^0 = 2c_1 - 3c_2 = 0. \quad (1.7)$$

4. 解關於 c_1, c_2 的方程組 :

從(1.7)中得出 : $2c_1 = 3c_2 \implies c_2 = \frac{2}{3}c_1$ 。代入(1.6)中 :

$$c_1 + \frac{2}{3}c_1 = 1 \implies \frac{5}{3}c_1 = 1 \implies c_1 = \frac{3}{5}.$$

那麼 $c_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$ 。 5. 最終解 :

$$y(x) = \frac{3}{5}e^{2x} + \frac{2}{5}e^{-3x}.$$

Example 11. 解初值問題 :

$$y'' + y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 3.$$

逐步解答 :

1. 通解 :

輔助方程為 $r^2 + 1 = 0$, 其根為 $r = \pm i$ (複數共軛根 , $\alpha = 0, \beta = 1$) 。通解為 :

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x.$$

2. 解的導數 :

$$y'(x) = -c_1 \sin x + c_2 \cos x.$$

3. 應用初始條件 :

- $y(0) = 2$: 代入 $x = 0$:

$$c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 = c_1 = 2.$$

- $y'(0) = 3$: 代入 $x = 0$:

$$-c_1 \sin 0 + c_2 \cos 0 = c_2 = 3.$$

4. 最終解 :

$$y(x) = 2 \cos x + 3 \sin x.$$

邊值問題例子

Example 12. 解邊值問題 :

$$y'' + 2y' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 3.$$

逐步解答：

1. 通解：

輔助方程為 $r^2 + 2r + 1 = 0$ ，具重根 $r = -1$ 。通解為：

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}.$$

2. 應用邊界條件：

- $y(0) = 1$ ：代入 $x = 0$ ：

$$c_1 e^0 + c_2 \cdot 0 \cdot e^0 = c_1 = 1.$$

- $y(1) = 3$ ：代入 $x = 1$ 及 $c_1 = 1$ ：

$$1 \cdot e^{-1} + c_2 \cdot 1 \cdot e^{-1} = 3.$$

3. 求解 c_2 ：

兩邊同乘 e 以消除指數：

$$1 + c_2 = 3e \implies c_2 = 3e - 1.$$

4. 最終解：

$$y(x) = e^{-x} + (3e - 1)x e^{-x}.$$

 $ay'' + by' + cy = 0$ 解法摘要

下表總結了常係數齊次方程的三種情況，以及它們的通解：

判別式	$ar^2 + br + c = 0$ 的根	$ay'' + by' + cy = 0$ 的通解
$\Delta = b^2 - 4ac > 0$	相異實根 r_1, r_2	$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$
$\Delta = b^2 - 4ac = 0$	重實根 $r = r_1 = r_2$	$y = c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx}$
$\Delta = b^2 - 4ac < 0$	複數共軛根 $r = \alpha \pm i\beta$	$y = e^{\alpha x} (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$

Table 1: 常係數齊次方程完整解法摘要

練習

求 $y(t)$ 的初值問題：

$$\begin{cases} 2y'' - 3y' + y = 0 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

練習

求 $y(t)$ 的初值問題：

$$\begin{cases} 2y'' - 3y' + y = 0 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

1：求通解

給定的微分方程是一個常係數的二階線性齊次ODE。我們使用輔助（特徵）方程法來求解。

將 $y'' \rightarrow r^2$, $y' \rightarrow r$, 及 $y \rightarrow 1$ 替換，得出 $2y'' - 3y' + y = 0$ 的輔助方程：

$$2r^2 - 3r + 1 = 0$$

透過因式分解來解二次方程：

$$(2r - 1)(r - 1) = 0$$

其根為：

$$r_1 = \frac{1}{2}, \quad r_2 = 1$$

由於為相異實根，因此通解為：

$$y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} = c_1 e^{t/2} + c_2 e^t$$

其中 c_1, c_2 為任意常數。

2：應用初始條件

我們利用初始條件 $y(0) = 2$ 和 $y'(0) = 1/2$ 來解出 c_1 和 c_2 。首先，計算通解的導數：

$$y'(t) = \frac{d}{dt} (c_1 e^{t/2} + c_2 e^t) = \frac{1}{2} c_1 e^{t/2} + c_2 e^t$$

現在代入初始條件：

1. 條件1： $y(0) = 2$

將 $t = 0$ 代入 $y(t)$ 中：

$$y(0) = c_1 e^0 + c_2 e^0 = c_1 + c_2 = 2 \quad (1)$$

2. 條件2： $y'(0) = 1/2$

將 $t = 0$ 代入 $y'(t)$ 中：

$$y'(0) = \frac{1}{2} c_1 e^0 + c_2 e^0 = \frac{1}{2} c_1 + c_2 = \frac{1}{2} \quad (2)$$

3：解關於 c_1, c_2 的方程組

我們求解線性方程組(1) 和(2)：

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 2 \\ \frac{1}{2}c_1 + c_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

從方程(1) 中減去方程(2) 以消除 c_2 ：

$$\begin{aligned} (c_1 + c_2) - \left(\frac{1}{2}c_1 + c_2\right) &= 2 - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}c_1 &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

兩邊同乘2：

$$c_1 = 3$$

將 $c_1 = 3$ 代回方程(1) 中：

$$3 + c_2 = 2 \implies c_2 = -1$$

4：最終解

將 $c_1 = 3$ 和 $c_2 = -1$ 代入通解中：

$$\boxed{y(t) = 3e^{t/2} - e^t}$$

驗證 為了確認解是否正確，我們將 $y(t)$ 代回原始微分方程中：

- 計算導數：

$$y'(t) = \frac{3}{2}e^{t/2} - e^t, \quad y''(t) = \frac{3}{4}e^{t/2} - e^t$$

- 代入 $2y'' - 3y' + y$ 中：

$$\begin{aligned} &2\left(\frac{3}{4}e^{t/2} - e^t\right) - 3\left(\frac{3}{2}e^{t/2} - e^t\right) + (3e^{t/2} - e^t) \\ &= \left(\frac{3}{2}e^{t/2} - 2e^t\right) - \left(\frac{9}{2}e^{t/2} - 3e^t\right) + 3e^{t/2} - e^t \\ &= \left(\frac{3}{2} - \frac{9}{2} + 3\right)e^{t/2} + (-2 + 3 - 1)e^t = 0 \end{aligned}$$

此解滿足該微分方程。檢查初始條件：

$$- y(0) = 3e^0 - e^0 = 3 - 1 = 2$$

$$- y'(0) = \frac{3}{2}e^0 - e^0 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$