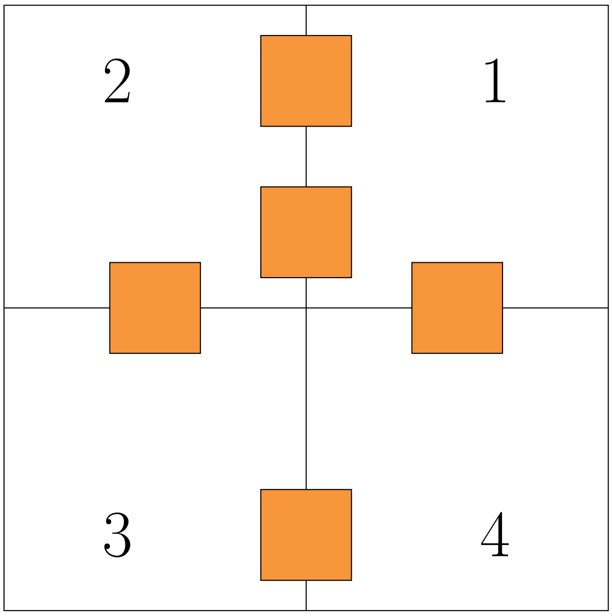
香港中文大學
數學系
馬可夫鏈及其應用練習

1 第一節：四個隔間的老鼠馬可夫鏈例子

1.1 問題陳述

附圖顯示了四個相連的隔間，標號為1、2、3、4，隔間之間設有內部通道（門）。一隻位於任何隔間的老鼠，會在一個離散時間步內，從其當前所在隔間的所有出口中等機率（隨機均勻）地選擇一扇門，移動到相鄰的隔間。我們首先推導單步轉移矩陣**P**，然後透過詳細計算來解答兩個後續的機率問題。



1.2 推導單步轉移矩陣P

橫列（Rows）代表起始狀態（當前隔間）；直行（Columns）代表移動一步後的目的地隔間。矩陣元素$\mathbf{P}_{ij} = \mathbb{P}(X_{t+1} = j \mid X_t = i)$。

- 隔間1 設有通往隔間2 和4 的出口門：每扇門被選中的機率相等，因此$\mathbf{P}_{12} = \frac{2}{3}, \mathbf{P}_{14} = \frac{1}{3}$（通往隔間2 有兩扇門，通往隔間4 有一扇門，合共3 個出口）
- 隔間2 設有通往隔間1 和3 的出口門：$\mathbf{P}_{21} = \frac{2}{3}, \mathbf{P}_{23} = \frac{1}{3}$
- 隔間3 設有通往隔間2 和4 的出口門：兩者機率均等，各為$\frac{1}{2}$，因此$\mathbf{P}_{32} = \frac{1}{2}, \mathbf{P}_{34} = \frac{1}{2}$
- 隔間4 設有通往隔間1 和3 的出口門：兩者機率均等，各為$\frac{1}{2}$，因此$\mathbf{P}_{41} = \frac{1}{2}, \mathbf{P}_{43} = \frac{1}{2}$

完整的4×4 轉移矩陣（行列狀態標籤為1、2、3、4）如下：

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \text{目的地} \\ \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \text{當前狀態}$$

1.3 從隔間2 出發，3 步後老鼠位於隔間2 的機率

1.3.1 設定

初始分佈（時間$t = 0$ 時從狀態2 出發）：

$$\boldsymbol{\pi}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

離散時間馬可夫鏈的邊際分佈更新規則：

$$\boldsymbol{\pi}_n = \boldsymbol{\pi}_{n-1}\mathbf{P}, \quad n = 1, 2, 3$$

我們會在每一步展開完整的矩陣乘法，依次序計算$\boldsymbol{\pi}_1$、$\boldsymbol{\pi}_2$、$\boldsymbol{\pi}_3$。

1.3.2 計算$\boldsymbol{\pi}_1 = \boldsymbol{\pi}_0\mathbf{P}$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\pi}_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \\
&= \left(0 \cdot 0 + 1 \cdot \frac{2}{3} + 0 \cdot 0 + 0 \cdot \frac{1}{2}, \quad 0 \cdot \frac{2}{3} + 1 \cdot 0 + 0 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot 0, \quad 0 \cdot 0 + 1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot 0 + 0 \cdot \frac{1}{2}, \quad 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot 0 + 0 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot 0 \right) \\
&= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

1.3.3 計算$\boldsymbol{\pi}_2 = \boldsymbol{\pi}_1\mathbf{P}$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\pi}_2 &= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \\
&= \left(\frac{2}{3} \cdot 0 + 0 \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot 0 + 0 \cdot \frac{1}{2}, \quad \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + 0 \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot 0, \quad \frac{2}{3} \cdot 0 + 0 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot 0 + 0 \cdot \frac{1}{2}, \quad \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot 0 \right) \\
&= \left(0, \quad \frac{4}{9} + \frac{1}{6}, \quad 0, \quad \frac{2}{9} + \frac{1}{6} \right) \\
&= \left(0, \quad \frac{8+3}{18}, \quad 0, \quad \frac{4+3}{18} \right) \\
&= \begin{pmatrix} 0 & \frac{11}{18} & 0 & \frac{7}{18} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

1.3.4 計算$\boldsymbol{\pi}_3 = \boldsymbol{\pi}_2\mathbf{P}$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\pi}_3 &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{11}{18} & 0 & \frac{7}{18} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \\
&= \left(0 \cdot 0 + \frac{11}{18} \cdot \frac{2}{3} + 0 \cdot 0 + \frac{7}{18} \cdot \frac{1}{2}, \quad 0 \cdot \frac{2}{3} + \frac{11}{18} \cdot 0 + 0 \cdot \frac{1}{2} + \frac{7}{18} \cdot 0, \quad 0 \cdot 0 + \frac{11}{18} \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot 0 + \frac{7}{18} \cdot \frac{1}{2}, \quad 0 \cdot \frac{1}{3} + \frac{11}{18} \cdot 0 + 0 \cdot \frac{1}{2} + \frac{7}{18} \cdot 0 \right) \\
&= \left(\frac{22}{54} + \frac{7}{36}, \quad 0, \quad \frac{11}{54} + \frac{7}{36}, \quad 0 \right) \\
&= \left(\frac{44+21}{108}, \quad 0, \quad \frac{22+21}{108}, \quad 0 \right) \\
&= \begin{pmatrix} \frac{65}{108} & 0 & \frac{43}{108} & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

1.3.5 結論與推論

$\boldsymbol{\pi}_3$ 的第二項（步數$t = 3$ 時位於隔間2 的機率）等於0。

原因：轉移矩陣的對角線元素皆為零（對所有i，$\mathbf{P}_{ii} = 0$）：老鼠不可能在一個完整的步數內停留在目前的隔間。

所有轉移都在奇數索引狀態$\{1, 4\}$ 和偶數索引狀態$\{2, 3\}$ 之間交替。

從偶數狀態2 出發（偶數步數偏移）：

- $t = 0$（0 步，偶數）：狀態2（偶數集合）

- $t = 1$（1 步，奇數）：只有狀態1、3（奇偶交替集合）

- $t = 2$（2 步，偶數）：只有狀態2、4（原本的偶數集合）

- $t = 3$（3 步，奇數）：只有狀態1、3（交替集合）

在奇數步$t = 3$ 時，無法到達狀態2，因此機率$= 0$。

1.4 隔間2 的長期平穩機率

1.4.1 平穩分佈定義

平穩邊際分佈$\boldsymbol{\pi}^* = \begin{pmatrix}\pi_1^* & \pi_2^* & \pi_3^* & \pi_4^*\end{pmatrix}$ 滿足以下平衡方程式：

$$\boldsymbol{\pi}^*\mathbf{P} = \boldsymbol{\pi}^*, \quad \pi_1^* + \pi_2^* + \pi_3^* + \pi_4^* = 1, \quad \pi_i^* \geq 0$$

設$\boldsymbol{\pi}^* = \begin{pmatrix}x & y & z & m\end{pmatrix}$，其中$x = \pi_1^*, y = \pi_2^*, z = \pi_3^*, m = \pi_4^*$。

展開矩陣乘法以求得線性平衡方程式：

$$\begin{pmatrix}x & y & z & m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x & y & z & m\end{pmatrix}$$

逐行（Column-wise）將左右兩邊相等，建立線性方程組：

$$\begin{aligned}
\text{第1 直行（狀態1 平衡）：} \quad & \frac{2}{3}y + \frac{1}{2}m = x && (1) \\
\text{第2 直行（狀態2 平衡）：} \quad & \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}z = y && (2) \\
\text{第3 直行（狀態3 平衡）：} \quad & \frac{1}{3}y + \frac{1}{2}m = z && (3) \\
\text{第4 直行（狀態4 平衡）：} \quad & \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}z = m && (4) \\
\text{歸一化約束條件：} \quad & x + y + z + m = 1 && (5)
\end{aligned}$$

1.4.2 求解線性方程組

1. 結合方程式(1) 和(2)：設定$x = 1$ 代入以找出相對比例解（稍後會再將總機率歸一化為單位值1）：

$$x = 1 \implies \text{從(1), (2) 的對稱性得出：} y = 1$$

2. 將$y = 1, x = 1$ 代入方程式(1)：

$$\frac{2}{3}(1) + \frac{1}{2}m = 1 \implies \frac{1}{2}m = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \implies m = \frac{2}{3}$$

3. 將$y = 1, m = \frac{2}{3}$ 代入方程式(3)：

$$z = \frac{1}{3}(1) + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

相對未歸一化平穩向量：

$$\boldsymbol{\pi}^*_{\text{raw}} = \begin{pmatrix} x & y & z & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

計算原始向量各項的總和以進行歸一化：

$$S = 1 + 1 + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 2 + \frac{4}{3} = \frac{6+4}{3} = \frac{10}{3}$$

將原始向量除以總和$S = \frac{10}{3}$，以滿足機率歸一化條件$\sum \pi_i^* = 1$：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\pi}^* = \frac{\boldsymbol{\pi}^*_{\text{raw}}}{S} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \cdot \frac{3}{10} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot \frac{3}{10} & 1 \cdot \frac{3}{10} & \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{10} & \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{10} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & \frac{3}{10} & \frac{2}{10} & \frac{2}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.3 & 0.2 & 0.2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

1.4.3 長期機率結果

隔間2 的平穩機率為$\pi_2^* = \frac{3}{10} = 0.3$。

原因：此馬可夫鏈具備不可約性（*irreducible*）及非週期性（*aperiodic*），因此存在一個唯一的平穩分佈，且該分佈等於每個隔間的長期佔用機率。

2 第二節：雙狀態馬可夫鏈例子

2.1 問題陳述

設$\{X_n, n \geq 0\}$ 為一個具有有限狀態空間$\mathcal{S} = \{1, 2\}$ 的離散時間馬可夫鏈。

- 在$t = 0$ 的初始邊際分佈：$\boldsymbol{\pi}_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$
- 單步轉移矩陣（已修正原有的排版錯誤：刪除了多餘的$\frac{1}{2}$ 因子）：

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \text{目的地} \\ \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} 1 \\ 2 \end{array} \text{當前狀態}$$

我們要計算以下聯合路徑機率：

$$\mathbb{P}\big(X_1 = 2,\ X_4 = 1,\ X_6 = 1,\ X_{18} = 1 \,\big|\, X_0 = 1\big)$$

2.2 馬可夫路徑因式分解法則

根據馬可夫的無記憶性（memoryless property），以起始狀態$X_0 = 1$ 為條件的聯合路徑機率可分解為特定時間點之間的連續轉移機率相乘：

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\big(X_1 = 2, X_4 = 1, X_6 = 1, X_{18} = 1 \mid X_0 = 1\big) \\ &= \underbrace{\mathbb{P}(X_1 = 2 \mid X_0 = 1)}_{\mathbf{P}_{12}} \times \underbrace{\mathbb{P}(X_4 = 1 \mid X_1 = 2)}_{\mathbf{P}^3_{21}} \times \underbrace{\mathbb{P}(X_6 = 1 \mid X_4 = 1)}_{\mathbf{P}^2_{11}} \times \underbrace{\mathbb{P}(X_{18} = 1 \mid X_6 = 1)}_{\mathbf{P}^{12}_{11}} \end{aligned}$$

其中：

- $\mathbf{P}_{ij}$：從$i \to j$ 的1 步轉移機率

- $\mathbf{P}^k_{ij}$：從$i \to j$ 的k 步轉移機率，即矩陣次方$\mathbf{P}^k$ 的(i, j) 項

2.3 1：計算2 步轉移矩陣$\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}\mathbf{P}$

展示所有中間算術步驟的完整矩陣乘法：

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^2 &= \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (0.5)(0.5) + (0.5)(0.3) & (0.5)(0.5) + (0.5)(0.7) \\ (0.3)(0.5) + (0.7)(0.3) & (0.3)(0.5) + (0.7)(0.7) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0.25 + 0.15 & 0.25 + 0.35 \\ 0.15 + 0.21 & 0.15 + 0.49 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0.40 & 0.60 \\ 0.36 & 0.64 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

供稍後使用的關鍵項：$\mathbf{P}^2_{11} = 0.40$（2 步$1 \to 1$ 機率）

2.4 2：計算3 步轉移矩陣$\mathbf{P}^3 = \mathbf{P}^2\mathbf{P}$

完整展開乘法：

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}^3 &= \begin{pmatrix} 0.40 & 0.60 \\ 0.36 & 0.64 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (0.40)(0.5) + (0.60)(0.3) & (0.40)(0.5) + (0.60)(0.7) \\ (0.36)(0.5) + (0.64)(0.3) & (0.36)(0.5) + (0.64)(0.7) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0.20 + 0.18 & 0.20 + 0.42 \\ 0.18 + 0.192 & 0.18 + 0.448 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0.38 & 0.62 \\ 0.372 & 0.628 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

供稍後使用的關鍵項：$\mathbf{P}_{21}^3 = 0.372$（3 步$2 \to 1$ 機率）

2.5 剩餘所需項目摘要

1. $\mathbf{P}_{12} = 0.5$（1 步$1 \to 2$）
2. $\mathbf{P}_{21}^3 = 0.372$（3 步$2 \to 1$）
3. $\mathbf{P}_{11}^2 = 0.40$（2 步$1 \to 1$）
4. $\mathbf{P}_{11}^{12}$：需要透過迭代矩陣求冪（標準譜分解或反覆平方法以獲取完整的數值；下面的程式碼擴充會自動計算所有矩陣次方）來求得。

2.6 最終聯合機率表達式

$$\mathbb{P}(\cdot) = \mathbf{P}_{12} \cdot \mathbf{P}_{21}^3 \cdot \mathbf{P}_{11}^2 \cdot \mathbf{P}_{11}^{12} = 0.5 \times 0.372 \times 0.40 \times \mathbf{P}_{11}^{12} = 0.0744 \cdot \mathbf{P}_{11}^{12}$$

3 第三節：馬可夫鏈在天氣預報的應用

3.1 香港天氣馬可夫鏈例子

本節透過收集自香港的天氣觀測數據，展示一個實用的馬可夫鏈案例分析。我們將天氣系統簡化為三個互斥的離散狀態：

1. 多雲
2. 晴天
3. 下雪

符合馬可夫的無記憶性，明日的天氣狀態機率分佈僅取決於今日觀測到的天氣狀態，與當前日子之前的歷史天氣無關。

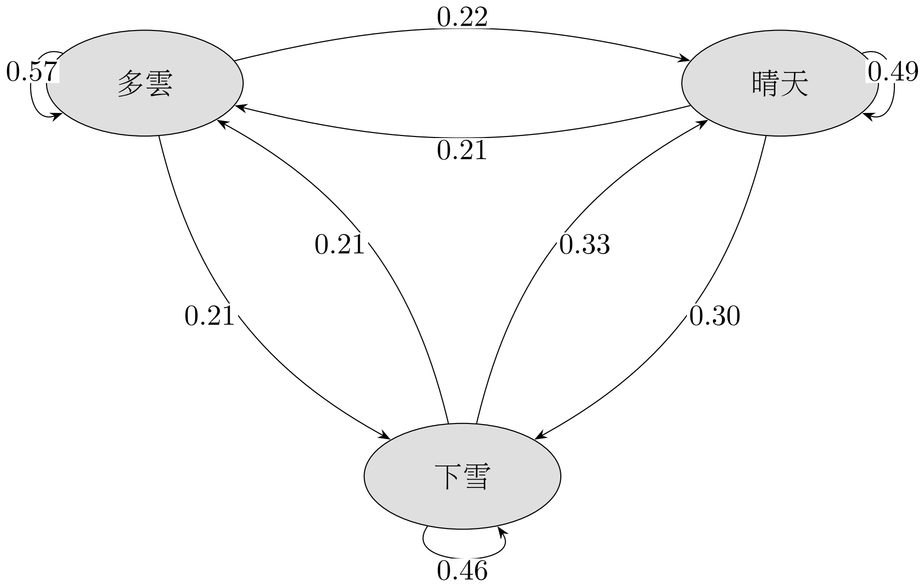


Figure 1: 使用有向圖表示的狀態圖（邊緣機率符合有效的隨機轉移矩陣，每橫列總和精確為1）

3.1.1 單步轉移矩陣P

轉移矩陣**P** 是根據2019 年11 月整個月內每日中午記錄的30 次天氣觀測數據構建而成。橫列代表當前的天氣狀態；直行代表隔天的天氣狀態。所有橫列的總和精確為1，符合馬可夫鏈轉移的有效離散機率分佈定義。

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \text{多雲} & \text{晴天} & \text{下雪} \end{array} \\ \mathbf{P} = & \begin{bmatrix} 0.57 & 0.22 & 0.21 \\ 0.21 & 0.49 & 0.30 \\ 0.21 & 0.33 & 0.46 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{多雲（第1 列）} \\ \text{晴天（第2 列）} \\ \text{下雪（第3 列）} \end{array} \end{array}$$

橫列總和驗證（全部精確等於1.00）：

$$\text{第1 列總和：}0.57 + 0.22 + 0.21 = 1.00$$
$$\text{第2 列總和：}0.21 + 0.49 + 0.30 = 1.00$$
$$\text{第3 列總和：}0.21 + 0.33 + 0.46 = 1.00$$

3.1.2 初始狀態向量$\boldsymbol{\pi}_0$

在2020 年11 月12 日，中午觀測到的天氣狀態為「多雲」。初始狀態直行向量（column vector）定義如下：

$$\boldsymbol{\pi}_0 = \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \text{多雲} \\ \text{晴天} \\ \text{下雪} \end{array} \end{array}$$

我們的目標是預測11 月15 日（即初次觀測後三天，$t = 3$）的天氣狀況。離散時間馬可夫鏈的預測公式為：

$$\boldsymbol{\pi}_n = \mathbf{P}^n \boldsymbol{\pi}_0$$

3.1.3 $\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^2, \mathbf{P}^3$ 的矩陣推導

1：單步預測$\boldsymbol{\pi}_1 = \mathbf{P}\boldsymbol{\pi}_0$

$$\boldsymbol{\pi}_1 = \begin{bmatrix} 0.57 & 0.22 & 0.21 \\ 0.21 & 0.49 & 0.30 \\ 0.21 & 0.33 & 0.46 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.57 \cdot 1 + 0.22 \cdot 0 + 0.21 \cdot 0 \\ 0.21 \cdot 1 + 0.49 \cdot 0 + 0.30 \cdot 0 \\ 0.21 \cdot 1 + 0.33 \cdot 0 + 0.46 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.57 \\ 0.21 \\ 0.21 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{\pi}_1$ 得出了11 月13 日（提前1 天）的機率分佈。

2：計算兩步轉移矩陣$\mathbf{P}^2 = \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^2 &= \begin{bmatrix} 0.57 & 0.22 & 0.21 \\ 0.21 & 0.49 & 0.30 \\ 0.21 & 0.33 & 0.46 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.57 & 0.22 & 0.21 \\ 0.21 & 0.49 & 0.30 \\ 0.21 & 0.33 & 0.46 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (0.57 \cdot 0.57 + 0.22 \cdot 0.21 + 0.21 \cdot 0.21) & (0.57 \cdot 0.22 + 0.22 \cdot 0.49 + 0.21 \cdot 0.33) & (0.57 \cdot 0.21 + 0.22 \cdot 0.30 + 0.21 \cdot 0.46) \\ (0.21 \cdot 0.57 + 0.49 \cdot 0.21 + 0.30 \cdot 0.21) & (0.21 \cdot 0.22 + 0.49 \cdot 0.49 + 0.30 \cdot 0.33) & (0.21 \cdot 0.21 + 0.49 \cdot 0.30 + 0.30 \cdot 0.46) \\ (0.21 \cdot 0.57 + 0.33 \cdot 0.21 + 0.46 \cdot 0.21) & (0.21 \cdot 0.22 + 0.33 \cdot 0.49 + 0.46 \cdot 0.33) & (0.21 \cdot 0.21 + 0.33 \cdot 0.30 + 0.46 \cdot 0.46) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.4212 & 0.3079 & 0.2709 \\ 0.2037 & 0.3875 & 0.4088 \\ 0.2100 & 0.3609 & 0.4291 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

提前兩天的分佈：$\boldsymbol{\pi}_2 = \mathbf{P}^2\boldsymbol{\pi}_0 = \mathbf{P}^2$ 的第一行（column）：

$$\boldsymbol{\pi}_2 = \begin{bmatrix} 0.4212 \\ 0.2037 \\ 0.2100 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{\pi}_2$ 對應於11 月14 日（提前2 天）。

3：計算三步轉移矩陣$\mathbf{P}^3 = \mathbf{P}^2 \cdot \mathbf{P}$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^3 &= \begin{bmatrix} 0.4212 & 0.3079 & 0.2709 \\ 0.2037 & 0.3875 & 0.4088 \\ 0.2100 & 0.3609 & 0.4291 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.57 & 0.22 & 0.21 \\ 0.21 & 0.49 & 0.30 \\ 0.21 & 0.33 & 0.46 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.4212(0.57) + 0.3079(0.21) + 0.2709(0.21) & 0.4212(0.22) + 0.3079(0.49) + 0.2709(0.33) & 0.4212(0.21) + 0.3079(0.30) + 0.2709(0.46) \\ 0.2037(0.57) + 0.3875(0.21) + 0.4088(0.21) & 0.2037(0.22) + 0.3875(0.49) + 0.4088(0.33) & 0.2037(0.21) + 0.3875(0.30) + 0.4088(0.46) \\ 0.2100(0.57) + 0.3609(0.21) + 0.4291(0.21) & 0.2100(0.22) + 0.3609(0.49) + 0.4291(0.33) & 0.2100(0.21) + 0.3609(0.30) + 0.4291(0.46) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.3766 & 0.3443 & 0.2791 \\ 0.2046 & 0.3941 & 0.4013 \\ 0.2100 & 0.3712 & 0.4188 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$\mathbf{P}^2$ 和$\mathbf{P}^3$ 的所有橫列總和同樣精確為1，這是隨機矩陣乘法中保留的一項特性。

4：提前三天的預測向量$\boldsymbol{\pi}_3 = \mathbf{P}^3\boldsymbol{\pi}_0$ 由於$\boldsymbol{\pi}_0$ 是一個第一個元素為1 的單位向量，因此$\boldsymbol{\pi}_3$ 等於$\mathbf{P}^3$ 的第一行：

$$\boldsymbol{\pi}_3 = \mathbf{P}^3\boldsymbol{\pi}_0 = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 0.3766 \\ 0.2046 \\ 0.2100 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \text{多雲} \\ \text{晴天} \\ \text{下雪} \end{array} \end{array}$$

為方便閱讀，四捨五入至小數點後兩位：

$$\boldsymbol{\pi}_3 \approx \begin{bmatrix} 0.38 \\ 0.20 \\ 0.21 \end{bmatrix}$$

3.1.4 預測結果解讀

向量$\boldsymbol{\pi}_3$ 量化了11 月15 日（即11 月12 日首次觀測到多雲後的三天）的天氣狀態機率：

- 38% 機率為多雲天氣
- 20% 機率為晴天
- 21% 機率為下雪天氣

「多雲」仍然是最有可能的預測狀態，這與現實中隨後觀察到11 月15 日確為多雲的結果相符。

4 第四節：馬可夫鏈在營銷中的應用

4.1 馬可夫鏈用於信用風險評級遷移

當馬可夫鏈應用於信用風險計量時，轉移矩陣量化了實體（如企業或主權國家）未來信用評級遷移的機率。每個矩陣元素描述了受評級實體在下一個時期內保持其當前信用評級狀態，或轉移至另一評級類別的可能性。

4.2 馬可夫鏈用於預測金融市場趨勢

馬可夫鏈及其相關的狀態轉移圖提供了一個框架，用於模擬不同金融市場體制之間的機率轉換，從而能夠對未來的市場狀況進行量化預測。我們定義了三個互斥的市場趨勢狀態：

- **牛市（Bull markets）**：資產價格普遍上漲的延長時期，由市場參與者樂觀的前瞻性預期所推動。
- **熊市（Bear markets）**：資產價格普遍下跌的延長時期，由市場參與者悲觀的前瞻性預期所推動。
- **停滯市場（Stagnant markets）**：整體資產價格沒有持續向上或向下方向性移動的時期。

在一個資訊效率高的市場中，市場數據均勻地分佈在所有市場參與者之間，資產價格遵循隨機波動。每個市場參與者都能平等地獲取公開資訊，從而消除了私人內幕消息帶來的資訊優勢。對歷史市場時間序列數據的技術分析可以揭示反覆出現的市場體制模式及其相關的轉移機率。

假設的3 狀態市場馬可夫鏈例子

我們分析一個滿足馬可夫無記憶性的假設性每週市場體制系統，其轉移機率乃根據歷史市場觀察數據推導而出：

1. 在經歷一個牛市週後：有90% 的機率連續出現牛市週，7.5% 的機率轉為熊市週，2.5% 的機率轉為停滯週。
2. 在經歷一個熊市週後：有80% 的機率連續出現熊市週，15% 的機率轉為牛市週，5% 的機率轉為停滯週。
3. 在經歷一個停滯市場週後：有50% 的機率連續出現停滯週，25% 的機率轉為牛市週，25% 的機率轉為熊市週。

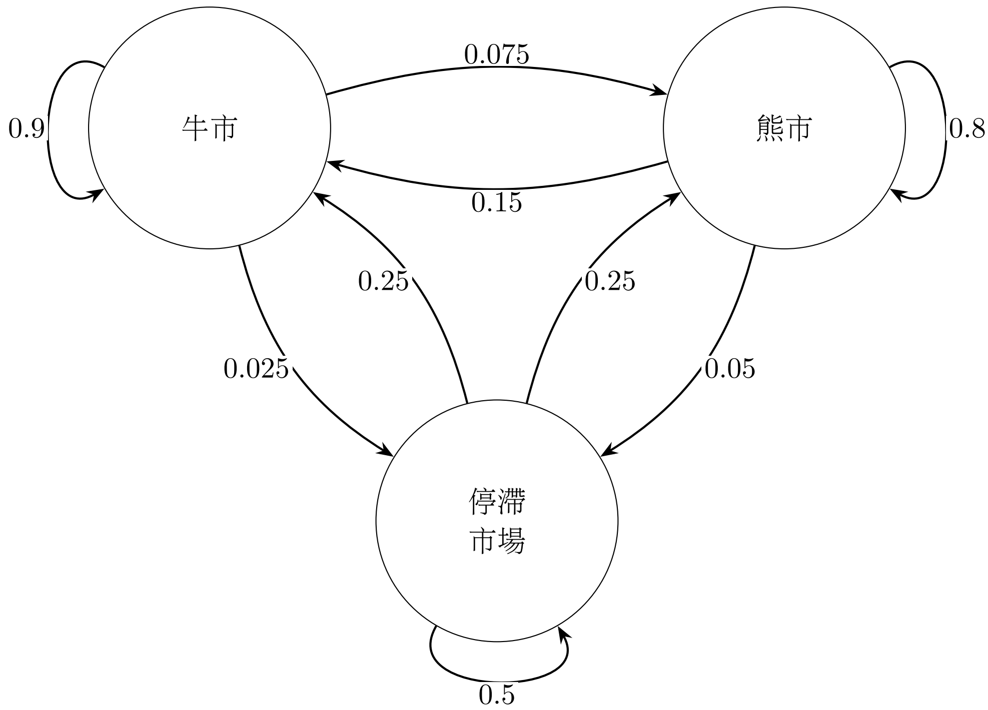


Figure 2: 虛擬每週市場體制馬可夫鏈的狀態轉移有向圖

4.2.1 單步轉移矩陣P（表1）

橫列代表當前市場狀態；直行代表下一週的市場狀態。所有橫列項目總和為1，滿足有效機率分佈的約束條件。

初始狀態橫列向量$\boldsymbol{\pi}$　1×3 橫列向量$\boldsymbol{\pi}$ 編碼了當前一週內三個市場狀態的機率分佈。直行索引對應為：

1. 第1 行：牛市
2. 第2 行：熊市
3. 第3 行：停滯市場

我們將系統初始狀態設定為本週處於熊市，得出初始橫列向量：

$$\boldsymbol{\pi} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Table 1: 單步每週市場轉移矩陣$\mathbf{P}$

從\ 至	牛市	熊市	停滯市場
牛市	0.900	0.075	0.025
熊市	0.150	0.800	0.050
停滯市場	0.250	0.250	0.500

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.900 & 0.075 & 0.025 \\ 0.150 & 0.800 & 0.050 \\ 0.250 & 0.250 & 0.500 \end{bmatrix}$$

對於離散時間馬可夫鏈，未來n 週的狀態分佈可透過橫列向量與矩陣乘法計算得出：

$$\boldsymbol{\pi}_n = \boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{P}^n$$

4.2.2 分佈計算

情況1：提前1 週預測（$n = 1$，$\boldsymbol{\pi}_1 = \boldsymbol{\pi}\mathbf{P}^1$）

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\pi}_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.900 & 0.075 & 0.025 \\ 0.150 & 0.800 & 0.050 \\ 0.250 & 0.250 & 0.500 \end{bmatrix} \\ &= \Big(0 \cdot 0.900 + 1 \cdot 0.150 + 0 \cdot 0.250, \quad 0 \cdot 0.075 + 1 \cdot 0.800 + 0 \cdot 0.250, \quad 0 \cdot 0.025 + 1 \cdot 0.050 + 0 \cdot 0.500 \Big) \\ &= \begin{bmatrix} 0.15 & 0.80 & 0.05 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

解讀：一週後，牛市機率為15%，熊市為80%，停滯為5%。

情況2：提前5 週預測（$n = 5$，$\boldsymbol{\pi}_5 = \boldsymbol{\pi}\mathbf{P}^5$） 首先計算中間矩陣次方以求清晰：

$$\mathbf{P}^2 = \mathbf{P} \cdot \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.82875 & 0.121875 & 0.049375 \\ 0.24000 & 0.666250 & 0.093750 \\ 0.40000 & 0.293750 & 0.306250 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}^3 = \mathbf{P}^2 \cdot \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.77390625 & 0.152109375 & 0.073984375 \\ 0.30328125 & 0.578281250 & 0.118437500 \\ 0.44718750 & 0.307968750 & 0.244843750 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}^4 = \mathbf{P}^3 \cdot \mathbf{P}, \quad \mathbf{P}^5 = \mathbf{P}^4 \cdot \mathbf{P}$$

將初始向量乘以$\mathbf{P}^5$：

$$\boldsymbol{\pi}_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{P}^5 = \begin{bmatrix} 0.48 & 0.45 & 0.07 \end{bmatrix}$$

解讀：五週後，牛市機率為48%，熊市為45%，停滯為7%。

情況3：提前52 週預測（$n = 52$，$\boldsymbol{\pi}_{52} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{P}^{52}$） 反覆的矩陣指數運算會使分佈收斂至一個穩態：

$$\boldsymbol{\pi}_{52} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{P}^{52} = \begin{bmatrix} 0.63 & 0.31 & 0.05 \end{bmatrix}$$

情況4：提前99 週預測（$n = 99$，$\boldsymbol{\pi}_{99} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{P}^{99}$） 進一步的指數運算得出與52 週預測相同的機率，證實了收斂性：

$$\boldsymbol{\pi}_{99} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{P}^{99} = \begin{bmatrix} 0.63 & 0.31 & 0.05 \end{bmatrix}$$

4.2.3 穩態（平穩）分佈推導與驗證

當時間跨度$n \to \infty$ 時，狀態分佈會收斂至一個唯一的平穩分佈$\boldsymbol{\pi}^* = \begin{bmatrix} \pi_1^* & \pi_2^* & \pi_3^* \end{bmatrix}$，其滿足以下平衡方程式：

$$\boldsymbol{\pi}^*\mathbf{P} = \boldsymbol{\pi}^*, \quad \pi_1^* + \pi_2^* + \pi_3^* = 1$$

將矩陣乘法展開為線性系統：

$$
\begin{aligned}
0.900\pi_1^* + 0.150\pi_2^* + 0.250\pi_3^* &= \pi_1^* && \text{(1（牛市平衡）)}\\
0.075\pi_1^* + 0.800\pi_2^* + 0.250\pi_3^* &= \pi_2^* && \text{(2（熊市平衡）)}\\
0.025\pi_1^* + 0.050\pi_2^* + 0.500\pi_3^* &= \pi_3^* && \text{(3（停滯平衡）)}\\
\pi_1^* + \pi_2^* + \pi_3^* &= 1 && \text{(4 歸一化)}
\end{aligned}
$$

簡化方程式(1)–(3)：

$$
\begin{aligned}
-0.100\pi_1^* + 0.150\pi_2^* + 0.250\pi_3^* &= 0\\
0.075\pi_1^* - 0.200\pi_2^* + 0.250\pi_3^* &= 0\\
0.025\pi_1^* + 0.050\pi_2^* - 0.500\pi_3^* &= 0
\end{aligned}
$$

在具有歸一化約束（4）的情況下求解線性系統：

$$\boldsymbol{\pi}^* = \begin{bmatrix} 0.63 & 0.31 & 0.05 \end{bmatrix}$$

結果推論：長期的穩態機率與$n = 52$ 和$n = 99$ 的預測結果相符：

- 所有週數中有63% 會是牛市體制

- 所有週數中有31% 會是熊市體制

- 所有週數中有5% 會是停滯市場體制

這個馬可夫鏈是不可約且非週期的，因此它的平穩分佈是唯一的，並且獨立於初始起始市場狀態。

4.2.4 模型的實際商業應用

平穩分佈與過渡性預測輸出可支援多項營銷與風險分析任務：

1. 計算在轉換至牛市或停滯狀況之前，熊市體制的預期平均持續時間。
2. 量化轉型風險指標：在單一週內從牛市體制轉為熊市或停滯狀況的機率。
3. 利用穩態市場體制的佔用機率來進行長期資產配置規劃。