

THE CHINESE UNIVERSITY OF HONG KONG

Department of Mathematics

Mathematical Modelling Project Team

mathmodel@math.cuhk.edu.hk

HSMMC Pre-workshop Learning Materials (Linear Algebra)

Last updated: March 23, 2026

Background 背景

Linear algebra plays an important role in various mathematical modelling tasks, such as:
線性代數在各種數學建模任務中扮演重要角色，例如：

- Solving systems of equations
解方程組
- Finding the best-fit parameters in the regression models
尋找回歸模型中的最佳擬合參數
- Evaluating the accuracy and error of the models
評估模型的準確性與誤差
- ...

Here, we cover some basic concepts of linear algebra, including vectors, matrices, and their operations.

在此，我們涵蓋一些線性代數的基本概念，包括向量、矩陣及其運算。

1 Vector 向量

An object of the form (a_1, a_2, \dots, a_n) is called an (**n -dimensional**) **vector**. The elements a_1, a_2, \dots, a_n are called the **entries**, or **components** of the vector.

形如 (a_1, a_2, \dots, a_n) 的物件稱為 (**n 維**) **向量**。元素 a_1, a_2, \dots, a_n 稱為向量的**條目**或**分量**。

More specifically, **row vectors** take the form

更具體地，**行向量**的形式為

$$(a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n)$$

and **column vectors** take the form

而列向量的形式為

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Example 例子

Below are some examples of row vectors:

以下是行向量的一些例子：

$$(1 \ 3), (2 \ -1 \ 0 \ 10 \ 7.5)$$

Below are some examples of column vectors:

以下是列向量的一些例子：

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \\ -1.59 \end{pmatrix}$$

Example 例子

The set of all n -dimensional vectors such that a_1, a_2, \dots, a_n are real numbers is denoted by \mathbb{R}^n . e.g. $(3, -2, 0)$ and $(-1, 1, 4)$ are both in \mathbb{R}^3 .

由所有實數 a_1, a_2, \dots, a_n 組成的 n 維向量集合，記為 \mathbb{R}^n 。例如， $(3, -2, 0)$ 和 $(-1, 1, 4)$ 均屬於 \mathbb{R}^3 。

2 Matrix 矩陣

An $m \times n$ **matrix** with entries from \mathbb{R} is a rectangular array of the form

一個元素取自 \mathbb{R} 的 $m \times n$ **矩陣** 是一個如下形式的矩形陣列：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

where each entry a_{ij} ($1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$) is a real number. We call the entries a_{ij} with $i = j$ the **diagonal entries** of the matrix. The entries $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$ compose the **i th row** of the matrix, and the entries $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}$ compose the **j th column** of the matrix.

其中每個條目 a_{ij} ($1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$) 都是一個實數。我們稱 $i = j$ 的條目 a_{ij} 為矩陣的**對角線條目**。條目 $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$ 組成矩陣的**第 i 行**，而條目 $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}$ 組成矩陣的**第 j 列**。

Remark. In this note, we denote matrices with capital letters (e.g., A , B , and C), and we denote the entry of a matrix A that lies in row i and column j by A_{ij} . In addition, if the number of rows and columns of a matrix are equal, the matrix is called a **square matrix**.

注釋： 在本筆記中，我們用大寫字母（例如 A 、 B 和 C ）表示矩陣，並用 A_{ij} 表示矩陣 A 中位於第 i 行第 j 列的條目。此外，如果一個矩陣的行數和列數相等，則稱之為**方陣**。

Example 例子

Below are some examples of matrices:

以下是一些矩陣的例子：

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 9 & 11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 8 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$$

3 Vector addition, Scalar multiplication

向量加法、純量乘法

\mathbb{R}^n is a set with the operations of coordinate-wise addition and scalar multiplication; that is, if $u = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ (here \in means “is in”/“is an element of”), $v = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, and $c \in \mathbb{R}$, then

\mathbb{R}^n 是一個配備了坐標式加法和純量乘法運算的集合；也就是說，若 $u = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ （此處 \in 意為「屬於」）， $v = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ ，且 $c \in \mathbb{R}$ ，則

$$u + v = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n) \quad \text{and} \quad cu = (ca_1, ca_2, \dots, ca_n).$$

Example 例子

In \mathbb{R}^3 , we have

在 \mathbb{R}^3 中，有

$$(3, -2, 0) + (-1, 1, 4) = (2, -1, 4) \quad \text{and} \quad -5(1, -2, 0) = (-5, 10, 0).$$

4 Matrix addition, Scalar multiplication

矩陣加法、純量乘法

The set of all $m \times n$ matrices with entries from \mathbb{R} is denoted by $M_{m \times n}(\mathbb{R})$, with the following operations of **matrix addition** and **scalar multiplication**: For $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ and $c \in \mathbb{R}$,

所有元素取自 \mathbb{R} 的 $m \times n$ 矩陣所組成的集合記為 $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ ，並配備以下**矩陣加法**和**純量乘法**運算：對於 $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ 及 $c \in \mathbb{R}$ ，

$$(A + B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij} \quad \text{and} \quad (cA)_{ij} = cA_{ij}$$

for $1 \leq i \leq m$ and $1 \leq j \leq n$.

其中 $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ 。

Example 例子

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 & -2 & 6 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

and

$$-3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -6 \\ 9 & -6 & -9 \end{pmatrix}$$

5 Matrix Multiplication 矩陣乘法

Let A be an $m \times n$ matrix and B be an $n \times p$ matrix. We define the **product** of A and B , denoted AB , to be the $m \times p$ matrix such that

設 A 一個 $m \times n$ 矩陣， B 為一個 $n \times p$ 矩陣。我們將 A 與 B 的積定義為一個 $m \times p$ 矩陣，記為 AB ，使得

$$(AB)_{ij} = A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \cdots + A_{in}B_{nj} = \sum_{k=1}^n A_{ik}B_{kj} \quad \text{for } 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq p$$

Remark. In order for the product AB to exist, there are restrictions regarding the relative sizes of A and B . The following mnemonic device is helpful: $(m \times n) \cdot (n \times p) = (m \times p)$. That is, the two “inner” dimensions must be equal, and the two “outer” dimensions yield the size of the product.

注釋： 要使乘積 AB 存在， A 和 B 的尺寸必須滿足特定條件。以下助記方法或有幫助： $(m \times n) \cdot (n \times p) = (m \times p)$ 。也就是說，兩個「內」維度必須相等，而兩個「外」維度則給出了乘積矩陣的大小。

Example 例子

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 5 \\ 0 \cdot 4 + 4 \cdot 2 + (-1) \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Note that the symbolic relationship is $(2 \times 3) \cdot (3 \times 1) = (2 \times 1)$.

請注意，其維度關係為 $(2 \times 3) \cdot (3 \times 1) = (2 \times 1)$ 。

6 Identity matrix 單位矩陣

The $n \times n$ **identity matrix** I_n is defined by $(I_n)_{ij} = 1$ if $i = j$ and $(I_n)_{ij} = 0$ if $i \neq j$. Verify that $AI_n = I_nA$ for all $n \times n$ matrices A .

$n \times n$ 單位矩陣 I_n 定義為：若 $i = j$ ，則 $(I_n)_{ij} = 1$ ；若 $i \neq j$ ，則 $(I_n)_{ij} = 0$ 。驗證對於所有 $n \times n$ 矩陣 A ， $AI_n = I_nA = A$ 。

Example 例子

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7 Transpose 轉置

The **transpose** A^T of an $m \times n$ matrix A is the $n \times m$ matrix obtained from A by interchanging the rows with the columns; that is,

一個 $m \times n$ 矩陣 A 的**轉置** A^T 是通過互換 A 的行與列得到的 $n \times m$ 矩陣；也就是說， $(A^T)_{ij} = A_{ji}$ 。 $(A^T)_{ij} = A_{ji}$ 。

Example 例子

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 5 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

8 Determinant (for 2×2 matrices)

行列式（對於 2×2 矩陣）

If $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ is a 2×2 matrix with entries from \mathbb{R} , then we define the **determinant** of A , denoted by $\det(A)$ or $|A|$, to be:

若 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 是一個元素取自 \mathbb{R} 的 2×2 矩陣，則我們將 A 的**行列式**記為 $\det(A)$ 或 $|A|$ ，定義為：

$$\det(A) = ad - bc.$$

Example 例子

For the matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ and $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$, we have

$$\det(A) = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2 \quad \text{and} \quad \det(B) = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 6 = 0$$

對於矩陣 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ 及 $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$ ，我們有

$$\det(A) = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2 \quad \text{及} \quad \det(B) = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 6 = 0$$

We can check that in general, $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$.

我們可以驗證，一般情況下 $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$ 。

9 Determinant (for general square matrices)

行列式（對於一般方陣）

Before we extend the definition of the determinant to $n \times n$ matrices for $n \geq 3$, it is convenient to introduce the following:

在將行列式的定義擴展到 $n \geq 3$ 的 $n \times n$ 矩陣之前，先引入以下記號會較為方便：

Notation Given $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$, for $n \geq 2$, denote the $(n-1) \times (n-1)$ matrix obtained from A by deleting row i and column j by \tilde{A}_{ij} . Thus for

標記：給定 $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ ，對於 $n \geq 2$ ，用 \tilde{A}_{ij} 表示從 A 中刪除第 i 行和第 j 列後得到的 $(n-1) \times (n-1)$ 矩陣。因此，對於

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R}),$$

we have

我們有

$$\tilde{A}_{11} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}_{13} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}, \quad \text{and} \quad \tilde{A}_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

and for

而對於

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ -3 & 4 & 1 & -1 \\ 2 & -5 & -3 & 8 \\ -2 & 6 & -4 & 1 \end{pmatrix} \in M_{4 \times 4}(\mathbb{R}),$$

we have

我們有

$$\tilde{B}_{23} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & 8 \\ -2 & 6 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \tilde{B}_{42} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 8 \end{pmatrix}.$$

Let $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$. If $n = 1$, so that $A = (A_{11})$, we define $\det(A) = A_{11}$. For $n \geq 2$, we define $\det(A)$ recursively as

設 $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ 。若 $n = 1$ ，即 $A = (A_{11})$ ，我們定義 $\det(A) = A_{11}$ 。對於 $n \geq 2$ ，我們遞歸地定義 $\det(A)$ 為

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} A_{1j} \cdot \det(\tilde{A}_{1j}).$$

The scalar $\det(A)$ is called the **determinant** of A and is also denoted by $|A|$.

純量 $\det(A)$ 稱為 A 的**行列式**，有時也記為 $|A|$ 。

The scalar

純量

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} \det(\tilde{A}_{ij})$$

is called the **cofactor** of the entry of A in row i , column j .

稱為 A 中位於第 i 行第 j 列的條目的**餘因數**。

Now we can express the formula for the determinant of A as

現在我們可以將 A 的行列式公式表達為

$$\det(A) = A_{11}c_{11} + A_{12}c_{12} + \cdots + A_{1n}c_{1n}.$$

This formula is called **cofactor expansion along the first row** of A . You can check that for 2×2 matrices, this definition of the determinant of A agrees with the one above.

這個公式稱為沿 A 的**第一行進行的餘因數展開**。你可以驗證，對於 2×2 矩陣，此行列式的定義與前述定義一致。

Example 例子

Let
設

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ -3 & -5 & 2 \\ -4 & 4 & -6 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R}).$$

Using cofactor expansion along the first row of A , we obtain

使用沿 A 的第一行進行的餘因數展開，我們得到

$$\begin{aligned} \det(A) &= (-1)^{1+1}A_{11} \cdot \det(\tilde{A}_{11}) + (-1)^{1+2}A_{12} \cdot \det(\tilde{A}_{12}) + (-1)^{1+3}A_{13} \cdot \det(\tilde{A}_{13}) \\ &= (-1)^2(1) \cdot \det \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} + (-1)^3(3) \cdot \det \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -4 & -6 \end{pmatrix} + (-1)^4(-3) \cdot \det \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \\ &= 1(22) - 3(26) - 3(-32) \\ &= 40. \end{aligned}$$

Remark. The determinant of a square matrix can be evaluated by cofactor expansion along any row. That is, if $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$, then for any integer i ($1 \leq i \leq n$),

注釋： 方陣的行列式可以通過沿任意一行進行餘因數展開來計算。也就是說，若 $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ ，則對於任意整數 i ($1 \leq i \leq n$)，

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} A_{ij} \cdot \det(\tilde{A}_{ij}).$$

10 Non-singular matrices 非奇異矩陣

If a square matrix has a non-zero determinant, it is called a **non-singular** matrix. If the determinant is zero, it is called a **singular** matrix.

如果一個方陣的行列式不為零，則稱之為**非奇異矩陣**。如果行列式為零，則稱之為**奇異矩陣**。

Example 例子

For the matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ and $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$, we have $\det(A) = -2$ and $\det(B) = 0$.

Therefore, A is non-singular and B is singular.

對於矩陣 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ 及 $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$ ，有 $\det(A) = -2$ 和 $\det(B) = 0$ 。因此， A 是非奇異的，而 B 是奇異的。

11 Matrix inverse 逆矩陣

Let A be an $n \times n$ matrix. Then A is **invertible** if there exists an $n \times n$ matrix B such that $AB = BA = I$.

設 A 為一個 $n \times n$ 矩陣。若存在一個 $n \times n$ 矩陣 B 使得 $AB = BA = I_n$ ，則 A 是**可逆的**。

If A is invertible, then the matrix B such that $AB = BA = I$ is unique. (Try to prove this.) The matrix B is called the **inverse** of A and is denoted by A^{-1} .

若 A 可逆，則滿足 $AB = BA = I_n$ 的矩陣 B 是唯一的。（嘗試證明這一點。）矩陣 B 稱為 A 的**逆矩陣**，記為 A^{-1} 。

Using the properties of determinant, it can be proved that A is invertible (i.e. A^{-1} exists) if and only if A is non-singular (i.e. $\det(A) \neq 0$).

利用行列式的性質，可以證明 A 可逆（即 A^{-1} 存在）當且僅當 A 是非奇異的（即 $\det(A) \neq 0$ ）。

For any 2×2 matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, it can be shown that the matrix inverse is

對於任意 2×2 矩陣 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ，可以證明其逆矩陣為

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Example 例子

The inverse of $\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ is $\begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ 的逆矩陣是 $\begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.

12 Vector and matrix norm 向量範數與矩陣範數

12.1 Euclidean norm 歐幾里得範數

For a vector $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, its **Euclidean norm** is defined as

對於向量 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ ，其**歐幾里得範數**定義為

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

Example 例子

If $\mathbf{x} = (1, 3, 1)$, we have $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{1^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{11}$.
若 $\mathbf{x} = (1, 3, 1)$ ，則 $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{1^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{11}$ 。

Remark. We can check that the Euclidean norm satisfies all the following requirements:

注釋：我們可以驗證歐幾里得範數滿足以下所有要求：

1. $\|\mathbf{x}\| \geq 0$, and $\|\mathbf{x}\| = 0$ if and only if $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, where $\mathbf{0}$ is the zero vector.
 $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ ，且 $\|\mathbf{x}\| = 0$ 當且僅當 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ，其中 $\mathbf{0}$ 是零向量。
2. $\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha| \cdot \|\mathbf{x}\|$, for all $\alpha \in \mathbb{R}$.
 $\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha| \cdot \|\mathbf{x}\|$ ，對所有 $\alpha \in \mathbb{R}$ 成立。
3. (Triangle Inequality): $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$.
(三角不等式)： $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ 。

With these conditions, we can extend the idea of Euclidean norm and define more general p -norms. 滿足這些條件後，我們可以擴展歐幾里得範數的概念，並定義更通用的 p -範數。

12.2 vector p -norm 向量的 p -範數

For a vector $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, its p -norm is defined as
對於向量 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ ，其 p -範數定義為

$$\|\mathbf{x}\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + \dots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

Example 例子

For the vector $\mathbf{x} = (2, -3)^T$, $\|\mathbf{x}\|_3 = \sqrt[3]{|2|^3 + |-3|^3} = \sqrt[3]{35}$.
對於向量 $\mathbf{x} = (2, -3)^T$ ， $\|\mathbf{x}\|_3 = \sqrt[3]{|2|^3 + |-3|^3} = \sqrt[3]{35}$ 。

Remark. $\|\mathbf{x}\|_2$ is nothing but the Euclidean norm. Also, we can see that

注釋： $\|\mathbf{x}\|_2$ 即為歐幾里得範數。此外，我們可以看到

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

and
及

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

You may take the latter one for granted, which can also be derived from definition, but it may need some technique.

你可以先接受後者，它也可以從定義推導出來，但可能需要一些技巧。

One can verify that all p -norms satisfy the three requirements of a norm listed above. (Proving the triangle inequality may also require some techniques.)

可以驗證所有 p -範數都滿足上述範數的三個要求。（證明三角不等式可能需要一些技巧。）

12.3 Matrix p -norm 矩陣的 p -範數

Besides vector norms, we can also define matrix norms. If A is an $m \times n$ matrix, then the p -norm of A is defined as:

除了向量範數，我們也可以定義矩陣範數。若 A 是一個 $m \times n$ 矩陣，則 A 的 p -範數定義為：

$$\|A\|_p = \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \|A\mathbf{x}\|_p.$$

This definition is hard to read. Let us provide some further explanation. The p -norm of a matrix A is a measure of the maximum extent to which A can amplify the p -norm of any vector. Specifically, it is defined as the maximum value of where \mathbf{x} is a vector with unit p norm. This definition captures the idea of the maximum “stretching” effect the matrix can have on a unit vector measured in the p -norm.

這個定義可能較難理解，讓我們再作一些解釋。矩陣 A 的 p -範數衡量的是 A 能夠放大任何向量 p -範數的最大程度。具體來說，它被定義為 $\|A\mathbf{x}\|_p$ 的最大值，其中 \mathbf{x} 是具有單位 p -範數的向量。這個定義體現了矩陣作用在單位向量上所能產生的最大「拉伸」效應（以 p -範數衡量）。

In practice, there are some much simpler formulas that we can use for calculating the matrix p -norms for some specific p .

在實踐中，對於某些特定的 p ，有一些更簡單的公式可用於計算矩陣的 p -範數。

In particular, it can be proved that for $p = 1$, we have

特別地，可以證明對於 $p = 1$ ，我們有

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}| \quad (\text{i.e. the maximum absolute column sum of } A).$$

For $p = 2$, we have

對於 $p = 2$ ，我們有

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)},$$

where $\lambda_{\max}(A^T A)$ is the maximum eigenvalue of $A^T A$.

其中 $\lambda_{\max}(A^T A)$ 是 $A^T A$ 的最大特徵值。

For $p = \infty$, we have

對於 $p = \infty$ ，我們有

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \quad (\text{i.e. the maximum absolute row sum of } A).$$

All these norms can be easily computed using standard commands in different programming languages (e.g. `numpy.linalg.norm` in Python).

所有這些範數都可以使用不同編程語言中的標準命令輕鬆計算（例如 Python 中的 `numpy.linalg.norm`）。

Example 例子

Let $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$. We have

設 $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ 。我們有

$$\|A\|_1 = \max(1 + |-2|, |-3| + 4) = 7$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max} \left(\begin{bmatrix} 5 & -11 \\ -11 & 25 \end{bmatrix} \right)} = 5.465$$

$$\|A\|_\infty = \max(1 + |-3|, |-2| + 4) = 6$$

Further readings 延伸閱讀

- Linear Algebra self-learning materials on Khan Academy:
Khan Academy的線性代數自學材料：
<https://www.khanacademy.org/math/linear-algebra>
- Linear Algebra self-learning materials on MIT OpenCourseWare:
MIT OpenCourseWare 的線性代數自學材料：
<https://ocw.mit.edu/courses/18-06-linear-algebra-spring-2010>