THE CHINESE UNIVERSITY OF HONG KONG
Department of Mathematics

Mathematical Modelling Project Team
mathmodel@math.cuhk.edu.hk

HSMMC Pre-workshop Exercise (Linear Algebra)

Last updated: March 23, 2026

1. Compute $-2u+4v$ where $u = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ and $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

2. (a) Calculate $\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

   (b) Calculate the inverse of $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$.

3. Define $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Calculate A^2, A^3, A^4.

   (b) Hence, write down A^n (where n is a positive integer).

   (c) Similarly, find $(A^{-1})^n$.

4. Please try the computational exercises in the Google Colab notebooks.

5. (Bonus) Let $C = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$. It is given that $C \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ and $C \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ for some non-zero vectors $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ and distinct scalars λ_1 and λ_2.

   (a) Prove that $\begin{vmatrix} p-\lambda_1 & q \\ r & s-\lambda_1 \end{vmatrix} = 0$ and $\begin{vmatrix} p-\lambda_2 & q \\ r & s-\lambda_2 \end{vmatrix} = 0$.

   (b) Hence, prove that λ_1 and λ_2 are the roots of the equation $\lambda^2 - tr(C)\cdot\lambda + \det(C) = 0$. (Here, $tr(C)$ = the sum of all diagonal entries of $C = p + s$, which is also known as the *trace* of a matrix.)

香港中文大學
數學系

數學建模計劃團隊
mathmodel@math.cuhk.edu.hk

香港－上海中學生數學建模比賽 (HSMMC) 工作坊前練習（線性代數）

最後更新: 2026年3月23日

1. 計算 $-2u+4v$，其中 $u=\begin{pmatrix}-2\\-2\\2\end{pmatrix}$ 及 $v=\begin{pmatrix}0\\4\\5\end{pmatrix}$。

2. (a) 計算 $\begin{pmatrix}3&7\\-1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&1\\4&2\end{pmatrix}$。

   (b) 計算 $\begin{pmatrix}5&3\\6&4\end{pmatrix}$ 的逆矩陣。

3. 設 $A=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$。

   (a) 計算 A^2、A^3、A^4。

   (b) 由此，歸納出 A^n（其中 n 為正整數）。

   (c) 同理，求 $(A^{-1})^n$。

4. 嘗試完成 Google Colab 筆記本中的計算練習。

5. （挑戰題）設 $C=\begin{pmatrix}p&q\\r&s\end{pmatrix}$。已知存在非零向量 $\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$ 及相異純量 λ_1 和 λ_2，使得 $C\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$ 及 $C\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}=\lambda_2\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$。

   (a) 證明 $\begin{vmatrix}p-\lambda_1&q\\r&s-\lambda_1\end{vmatrix}=0$ 及 $\begin{vmatrix}p-\lambda_2&q\\r&s-\lambda_2\end{vmatrix}=0$。

   (b) 由此，證明 λ_1 和 λ_2 為方程 $\lambda^2-\mathrm{tr}(C)\cdot\lambda+\det(C)=0$ 的根。
   （其中 $\mathrm{tr}(C)=C$ 的對角線元素之和 $=p+s$，亦稱為矩陣的跡。