

• 高中数学建模活动设计 •

水葫芦的生长

(选择性必修·第三册)

(教材、教学设计、学生活动手册)

上海市格致中学 余光辉

2024年6月



普通高中教科书

SHUXUE

数学

选择性必修

第三册

上海教育出版社



普通高中教科书

SHUXUE

数学

选择性必修

第三册

上海教育出版社



引论		1
第 1 部分	数学建模活动案例	
	1 刹车距离	4
	2 易拉罐的设计	8
	3 珠穆朗玛峰顶上有多少氧气	12
	4 水葫芦的生长	19
第 2 部分	数学建模活动 A	
	5 铅球投掷	28
	6 电梯调度	31
第 3 部分	数学建模活动 B	
	7 存款计划	34
	8 民生巨变 40 年	35
	9 教室里的照明	37
附录		
	附录 1 数学建模活动报告的写作	38
	附录 2 数学建模活动报告样例	39
	附录 3 有关数学建模活动中数学内容的说明	41

4 水葫芦的生长

在一些河道丰富的地区，我们常常会发现，一段时间内有一种绿色植物覆盖一大片，甚至是整个河面。这是一种名为水葫芦的植物，它的学名叫做凤眼莲。

1884年，在美国新奥尔良国际博览会上，原产于南美洲的水葫芦艳丽无比，人们于是将其作为观赏植物带回了各自的国家。1901年，水葫芦被作为观赏植物引入中国。



随着水葫芦的引入，人们逐渐发现，在适宜的环境下它的繁殖能力极强。据观察，在三个月的时间内，水葫芦可以由一株繁殖到数十万株。由于水葫芦在自然界没有天敌，这样超强的繁殖力很容易对环境、水上交通、人畜饮水安全、渔业生产造成不良的影响，形成季节性灾难。那么，水葫芦的繁殖能力究竟有多强呢？

你对水葫芦有哪些认识？请填入下框。

提出问题

要研究水葫芦的繁殖能力，你觉得可以从哪些方面展开？请将你的想法填入下框。

经过思考，我们可以提出如下一些问题：

问题1：在一段时间内，水葫芦可以覆盖多大面积的水域？其覆盖面积的增长情况是怎样的？

问题 2: 水葫芦的生长率在不同的季节是否会呈现出不同的规律?

建立模型

为了回答上述问题, 我们需要对水葫芦在不同季节覆盖水域的实际情况进行现场观察和记录, 或是寻找已有的数据资料.

在实际观察中, 我们发现水葫芦的叶片往往会互相覆盖、重叠, 这使得覆盖面积无法成为一个较为理想的观察指标. 为此, 研究人员提出另一种更为可靠的常用量度——生物量(biomass), 对植物可专称植物量(phytomass), 它是指某一时刻单位面积内实际存活的有机物质(包括生物体内所存食物)的总质量, 通常以 g 为单位.

这里呈现的是来自华南农业大学有关水葫芦生态研究的实验数据(表 4-1), 包括水葫芦在春(3月上旬)、夏(6月上旬)、秋(9月上旬)三个季节的植物量数据.

表 4-1 水葫芦在春、夏、秋三个季节的植物量数据

调查相隔时段/天	春季	夏季	秋季
0	25.01	21.17	26.83
10	57.77	46.59	46.67
20	126.79	116.53	82.87
30	254.74	301.94	162.70
40	625.95	878.01	361.05
50	1 578.94	2 166.43	842.95
60	3 621.85	5 085.05	1 866.37
70	6 721.45	8 620.32	3 972.83
80	10 189.24	13 298.84	5 644.10
90	15 009.17	20 713.92	8 778.56

注: 表中数据为 30 株水葫芦调查结果的平均值, 其中调查时段 0 代表水葫芦接入时的初始值. 数据源于华南农业大学冯熠荣(2003)的《水葫芦种群生态控制的基础研究》.

有了上面的数据, 我们就可以着手建立相应的数学模型, 以揭示水葫芦的生长规律. 根据生物学原理, 在一定条件下, 生物的生长率是稳定不变的. 从表 4-1 中的数据可以看出, 三个季节水葫芦的植物量均增长迅速, 其中夏季增长最快, 然后是春季和秋季. 因此, 水葫芦的繁殖能力可以由水葫芦的植物量在其生长时间内的增长情况来表示, 其中的数学关系可以表示如下:

设水葫芦的植物量为 y (单位: g), 生长时间为 t (单位: 天), 相应的关系式为 $y=f(t)$.

求解模型

接下来的任务就是要找出合适的关系函数 f ，以呈现植物量与生长时间的关联。

在探索两个变量之间的关系时，我们可以使用如下方法：

- (1) 使用描点法绘制散点图，观察变量之间的关系；
- (2) 使用相关分析，考察变量之间是否存在线性关系。

根据表 4-1 中的数据，用描点法绘制植物量 y 关于时间 t 的散点图(图 4-1)，以便考察 y 与 t 之间的变化关系。

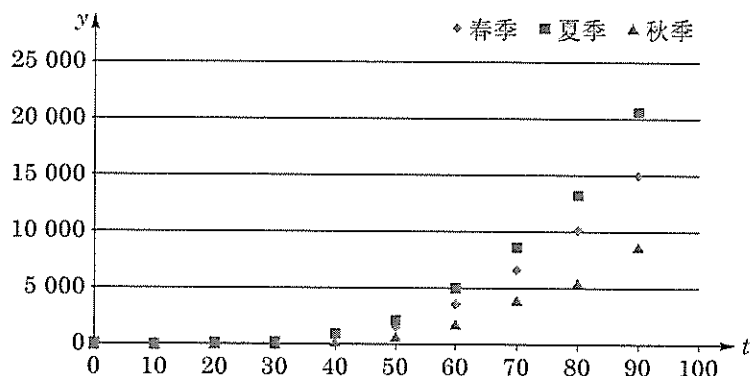


图 4-1

由图 4-1，水葫芦的植物量与时间呈现出某种函数关系。请仔细观察，据此猜测水葫芦的植物量 y 关于时间 t 可能满足哪种函数关系，并将你的猜测填入下框。

经过观察，你可能会发现：

(1) 水葫芦的植物量 y 与时间 t 具有某种曲线关系，而非用直线表示的一次函数关系；

(2) 水葫芦的植物量 y 与时间 t 呈现出某种二次函数的关系；

(3) 水葫芦的植物量 y 与时间 t 呈现出某种指数函数的关系。

如果水葫芦的植物量 y 与时间 t 确实存在某种二次函数关系，那么我们可以将这一函数关系表示为 $y = k + mt + nt^2$ ，其中 k 、 m 、 n 是待定的系数。

利用图形计算器或电脑软件，我们可以据此分别得到水葫芦在春季、夏季、秋季的生长函数，即相应的生长模型：

春季： $y = 799.196 - 132.926t + 3.15915t^2$ ，如图 4-2 所示；

夏季: $y=1112.68-184.387t+4.31916t^2$, 如图 4-3 所示;

秋季: $y=517.62-81.2539t+1.86572t^2$, 如图 4-4 所示.

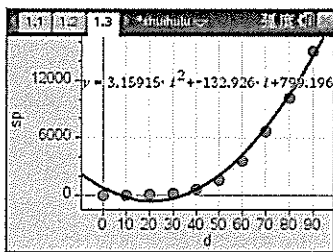


图 4-2

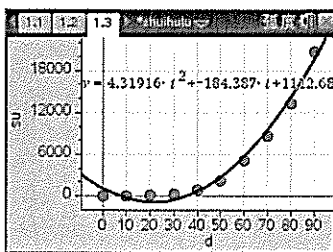


图 4-3

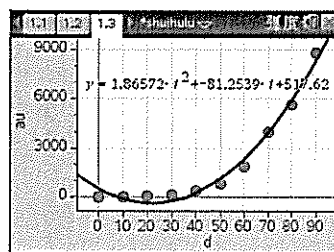


图 4-4

模型检验

为检验所建模型能否较好地体现这两个变量之间的关系, 较为常见的方法有:

方法 1: 比对所建模型的图形与原始数据的形态;

方法 2: 计算误差值并绘制相应的误差分布图, 以检验模型估计值是否与原始数据(即实际观测值)拟合良好.

这里先选用方法 1, 以春季为例, 比对所建模型的图形与原始数据的形态. 观察图 4-5, 模型估计值(红色)与原始数据(蓝色)在总体上还是较为贴合的. 但同时发现, 在 $t=10$ 、20 和 30 时, 模型估计值呈不应出现的负值, 且当 $t=0$ 时, 绝对差值达到 774.186. 这提示我们, 可能需要对这一函数模型进行调整.

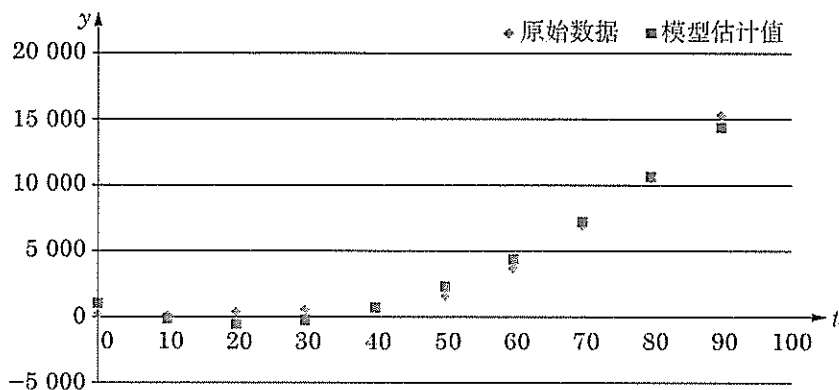


图 4-5

模型改进

观察图 4-1, 水葫芦的植物量 y 与时间 t 可能呈现出某种指数函数关系. 为了验证这

一猜测, 我们首先对植物量 y 取对数, 再建立 $\ln y$ 与 t 的函数关系. 由图 4-6 可以明显看出, $\ln y$ 与 t 之间存在着某种线性关系.

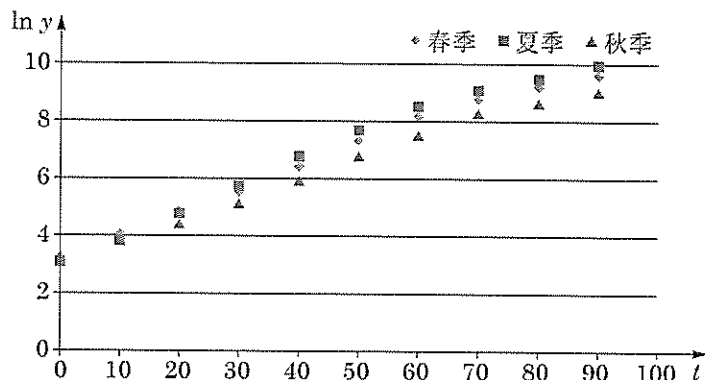


图 4-6

利用最小二乘估计(参见选择性必修课程第 8 章), 我们可以建立 $\ln y$ 与 t 之间的一元线性回归模型: $\ln y = at + b$, 其中 a 和 b 是待定系数. 记 $\ln y$ 为 s (即 $s = at + b$), 可得三个季节中 s 与 t 的线性拟合模型: 春季为 $s = 0.0803t + 3.27$, 夏季为 $s = 0.0743t + 3.39$, 秋季为 $s = 0.0686t + 3.19$. 将这些函数还原为指数函数, 就可以分别得到: 春季的生长模型为 $y = 26.3 \times 1.08^t$, 夏季的生长模型为 $y = 29.7 \times 1.08^t$, 秋季的生长模型为 $y = 24.3 \times 1.07^t$ (图 4-7).

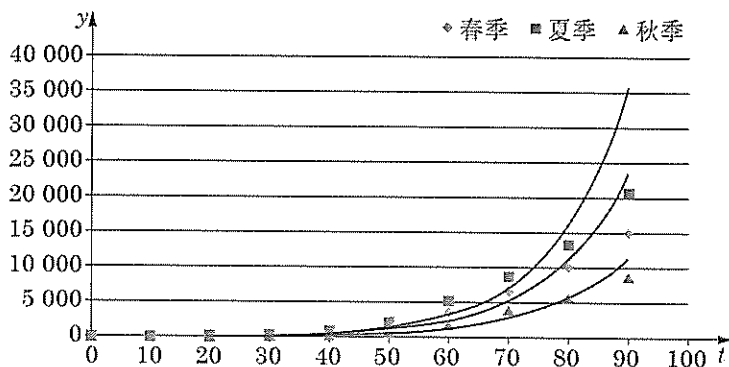


图 4-7

模型再检验

现在我们选用方法 2, 计算误差值并绘制出相应的误差分布图, 对指数函数模型的拟合程度进行鉴定. 图 4-8 显示, 模型估计值与实际观测值在前 70 天差距甚微, 而之后的估计值则与实际观测值产生了较大的偏差.

显然, 70 天之后的模型估计值要远大于实际观测值, 特别是当 $t = 90$ 时. 事实上, 许多生物种群在繁殖之初, 由于种群数量较少, 增长速度较快, 确实会呈指数形式增长. 但

随着时间的推移，当种群数量达到环境资源所能容纳的最大数量时，种群数量的增长速度会越来越慢，最终几乎停止增长。

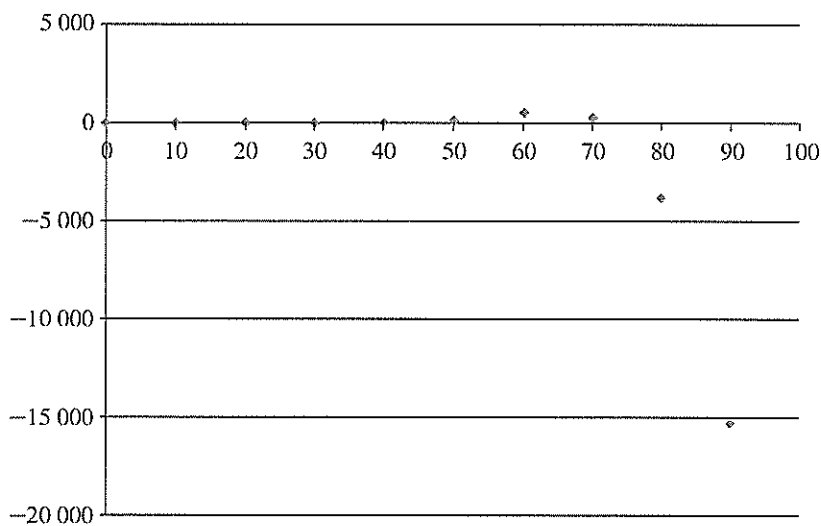


图 4-8

数学生物学家韦吕勒(P. F. Verhulst)针对此现象，在 1838 至 1847 年间对指数增长模型进行了调整，提出了著名的逻辑斯蒂函数(Logistic Function)模型

$$y = \frac{A}{1 + e^{b-kt}}$$

其中， k 为增长率， b 为常数。

该模型的计算相对复杂，但选用恰当的电脑软件，就可以得到水葫芦在春、夏、秋三个季节的逻辑斯蒂函数模型分别为：

春季： $y = \frac{23\,005.460}{1 + e^{6.402 - 0.078t}}$, $0 \leq t \leq 90$;

夏季： $y = \frac{39\,605.959}{1 + e^{6.254 - 0.070t}}$, $0 \leq t \leq 90$;

秋季： $y = \frac{14\,499.129}{1 + e^{6.446 - 0.076t}}$, $0 \leq t \leq 90$.

b 的意义

以春季的增长模型为例，通过检验发现，逻辑斯蒂函数模型所对应的绝对误差介于 13.075 和 383.801 之间，指数函数模型的误差介于 4.69 和 15 252.60 之间，而二次函数模型的误差介于 89.154 和 774.186 之间。显然，在这三种函数模型中，逻辑斯蒂函数模型能更准确地反映水葫芦的生长规律。

至此，请同学们撰写建模活动报告，记录整个研究的过程。

总结

在本案例中，我们关注的是身边的生态问题。对于这样一个既熟悉又陌生的现象，我

们手边往往没有现成的资料可使用，这时实地采集数据或搜索已有的相关文献资料是常用的方法。

在本课题中，我们所要探索的是水葫芦的生长规律。在数学上，就是要找寻水葫芦的植物量与生长时间之间的关系。运用描点法、最小二乘法和现代技术手段(如图形计算器或计算机编程)，我们找出了对应的函数关系式，并通过比较原始数据与模型估计值的形态(方法 1)和绘制误差分布图(方法 2)，发现指数函数模型能较好地刻画水葫芦在初始阶段的生长规律，但在生长后期模型会出现明显的误差。历史上，韦吕勒正是基于这样的生态现象，提出了目前广泛应用于生物学、医学、经济学等领域的逻辑斯蒂方程。误差检验也证实，相比于指数函数模型和二次函数模型，逻辑斯蒂函数模型能更准确地刻画水葫芦的生长规律。

需要指出的是，在本案例中，基于现有数据所建立的二次函数模型和指数函数模型在总体上也呈现出不错的拟合程度，这与我们所用的数据量较小不无关系。有兴趣的同学可以尝试获取更多的数据，对这两个模型进行更精细的验证。

参考文献

- [1] 冯煜荣. 水葫芦种群生态控制的基础研究[D]. 广州: 华南农业大学, 2003.
- [2] L. Edelstein-Keshet. *Mathematical Models in Biology*[M]. Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1988.

水葫芦的生长

上海市格致中学 余光辉

【教学内容分析】

本节课是上教版普通高中教科书数学选择性必修第三册第一部分主题4，内容为探讨水葫芦的生长速度。

本节课以水环境治理为背景，通过师生共同参与数学建模活动，引领学生经历建立模型、求解模型、检验模型、优化调整模型的过程，以期建立贴近实验数据、贴近实际情况的数学模型。在信息技术和科学计算设备的帮助下，通过对不同函数模型的拟合程度高低的比较，从函数的性质、函数图像变换的角度出发，调整函数的表达式，优化拟合程度，进而引出 Logistic 函数模型，并能利用模型对水葫芦未来的生长趋势进行预估。

通过本次活动，学生经历数学建模的过程，体会数学的应用价值，发展数据分析、数学建模素养。

【教学目标设置】

1. 通过分析数据，感受不同季节水葫芦生长规律的差异，并选择合适的函数模型拟合实验值。能根据拟合程度比较函数表达式，发展数据分析素养。
2. 在建模的过程中，会用 TI 图形计算器画散点图和回归曲线，并会进行误差分析，进一步掌握 TI 图形计算器图形、表格、数据与统计功能的用法。
3. 通过建模过程，了解水葫芦的生长规律，预估生长趋势，认识到水环境治理的重要性，并能提出恰当的治理方案，感受建模的意义和数学的价值，发展数学建模素养。

【教学重点与学习难点】

教学重点：分析实验数据，建立数学模型。

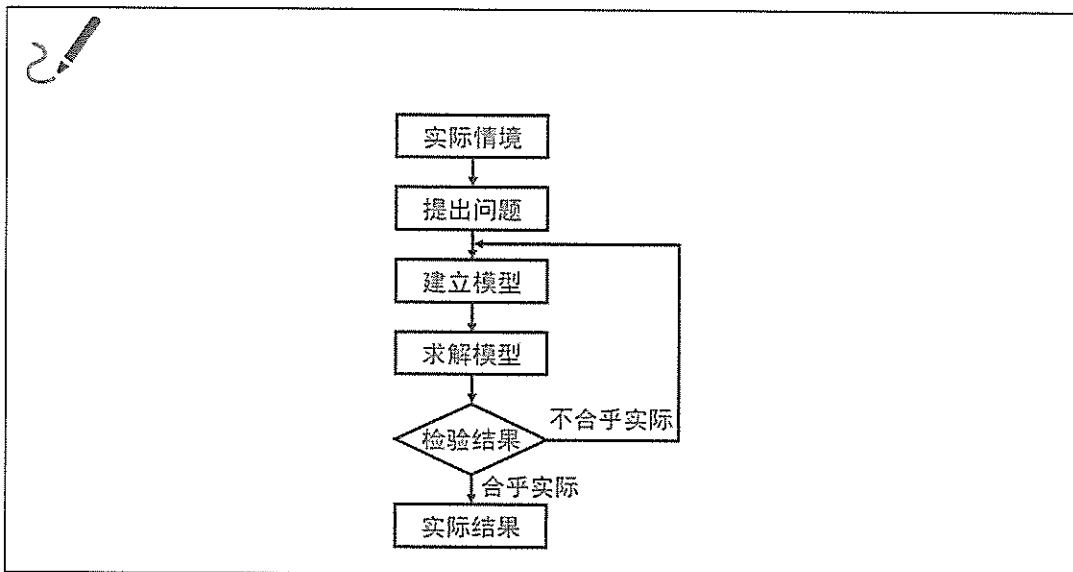
学习难点：对函数模型进行优化与调整。

【教学过程设计】

第一部分 回顾

在探究《车辆转弯时的安全隐患》时，同学们已经经历过一次完整的数学建模过程。

[回顾] 数学建模的基本过程有哪些？



本节课，我们将再次通过数学建模探讨一个生态环境治理问题。

第二部分 知新

(一) 实际情境·背景与对象

外来物种的入侵可能会破坏原本稳定的生态系统，例如具有超强生长能力的水葫芦。

请同学们观看视频介绍。

[简介：水葫芦（又名：凤眼莲，*Eichhornia crassipes* (Mart.) Solms），雨久花科凤眼莲属的浮水草本植物，因其中央具深蓝色块斑，蓝块斑中又有鲜黄色眼点，状似孔雀羽毛，故又名凤眼莲。

水葫芦原产于南美洲，现在广泛分布于中国长江、黄河流域及华南各地；在世界各地都有分布。它环境的适应性强，在池塘、水沟和低洼的渍水田均可生长，最喜气候温暖、阳光充足的环境，喜生于浅水、静水中。

水葫芦的种子能够长期存活，存活时间能达到5到20年左右，在13摄氏度以上的环境中开始生长，25摄氏度到32摄氏度的环境中生长的最快。研究显示，

在适宜条件下，水葫芦每 5 天可生长 1 株新植株，依此速率，1 株水葫芦 1 年之内可生长达到 1.4 亿株，足以铺满 140 公顷的水面。

如果不加以治理，水葫芦的肆意生长可能对环境、水上交通、饮水安全、渔业生产等造成不良影响，形成季节性的灾难。]

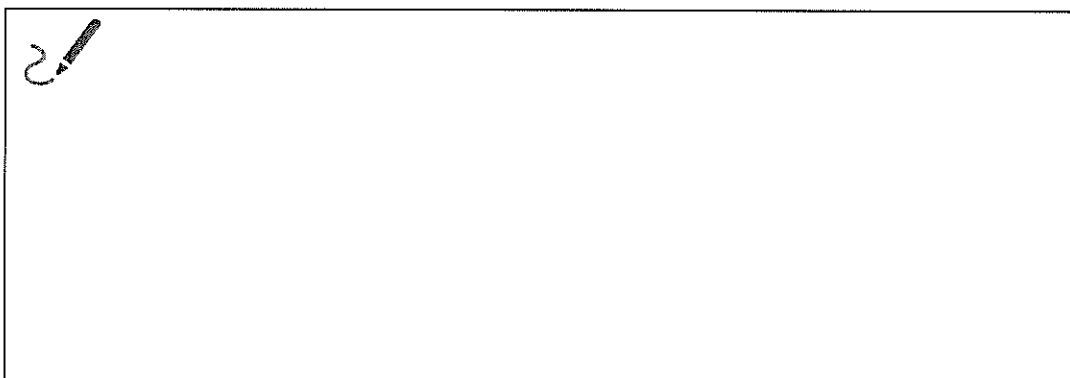
（二）提出问题·指标与因素

问题：水葫芦的生长能力究竟有多强？

[活动 1] 讨论关于“水葫芦的生长能力”的相关问题。

（1）如何描述“水葫芦的生长能力”？

（2）影响“水葫芦的生长能力”的因素有哪些？



在生物植物学中，我们用植物量(phytomass)作为观测指标的量度，它是指：某一单位面积内实际存活的有机物质（包括生物体内所存食物）的总质量，通常以 g 为单位。

影响因素方面，本节课选择以“季节”为主要变化因素，并假设其它因素是稳定不变的——水域状态良好（酸碱度适中，有充足的营养成分）、水域面积无限制、没有人为干预、光照充足，即条件适合水葫芦正常生长。

（三）建立模型·数据与模型

华南农业大学对水葫芦进行了研究，下表 1 是水葫芦生态研究的实验数据，包括水葫芦在春季（3 月上旬）、夏季（6 月上旬）、秋季（9 月上旬）三个季节植物量的部分数据。由于研究员的失误，夏季中有 3 个数据被污染难以辨别。


通过建立数学模型，希望能对夏季时水葫芦的生长规律有所了解，同时还希望帮助研究员推测复原被污染的三个数据。

表1 水葫芦在春、夏、秋三个季节的植物量数据

调查相隔时段/天	春季	夏季	秋季
0	25.01	21.17	26.83
10	57.77	46.59	46.67
20	126.79	116.53	82.87
30	254.74	301.94	162.7
40	625.95	878.01	361.05
50	1578.94	2166.43	842.95
60	3621.85	5085.05	1866.37
70	6721.45		3972.83
80	10189.24		5644.10
90	15009.17	20000.00	8778.56

表是来自华南农业大学有关水葫芦生态研究的实验数据，表中数据为30株水葫芦调查结果的平均值，其中调查时段0代表水葫芦接入时的初始值。数据源于华南农业大学冯熠荣（2003）的《水葫芦种群生态控制的基础研究》。

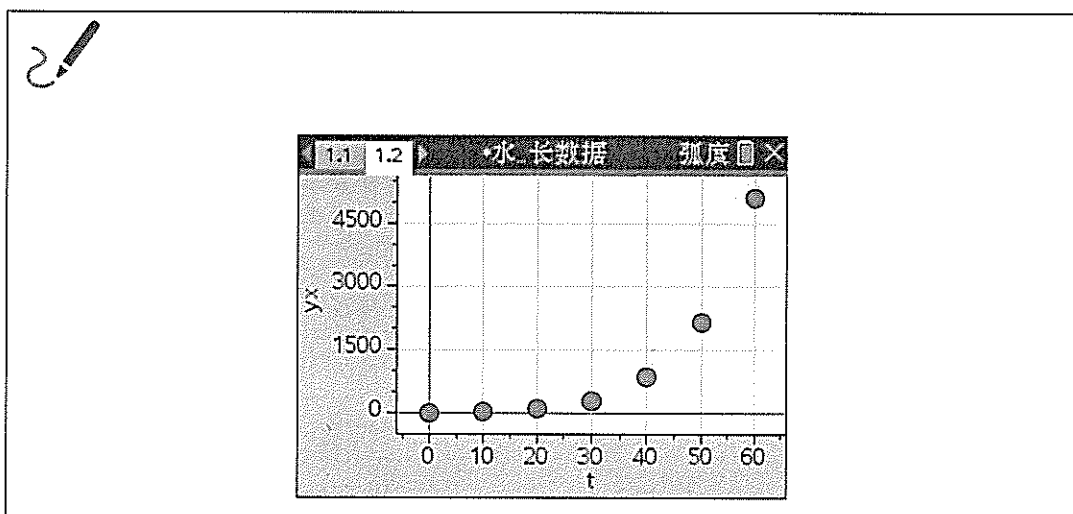
[活动2] 根据表格中的数据，分析并讨论表中的这些数据能反应或推理出哪些信息？



时至6月，步入初夏，本节课我们选择“夏季”的数据进一步加以研究。

夏季时，设水葫芦的植物量为 y （单位：g），时间为 t （时间：天），相应的关系式为 $y=f(t)$ ，其中 t 为自然数。

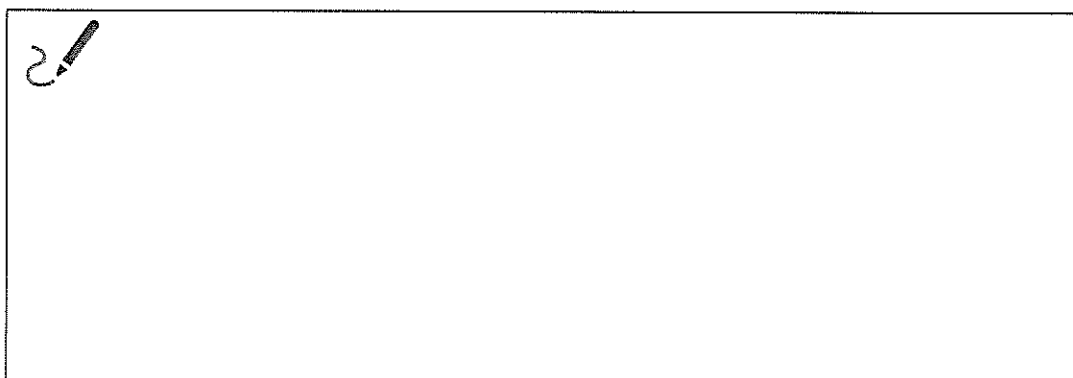
[活动 3] 在 TI 图形计算器中, 画出夏季水葫芦植物量 y 关于时间 t 的散点图.



在平面直角坐标系中, 找一条曲线去“贴近”数据散点图中的各点 (x_i, y_i) ($i=1, 2, \dots, n$), 这样的曲线称为这组数据的一条拟合曲线, 记为 $y=f(x)$.

[活动 4] 观察散点图, 在 TI 图形计算器上操作并讨论.

- (1) 猜想 y 与 t 之间的关系更符合线性、多项式、指数、对数中的哪种?
- (2) 在散点图中添加拟合曲线, 并写出拟合曲线的方程.

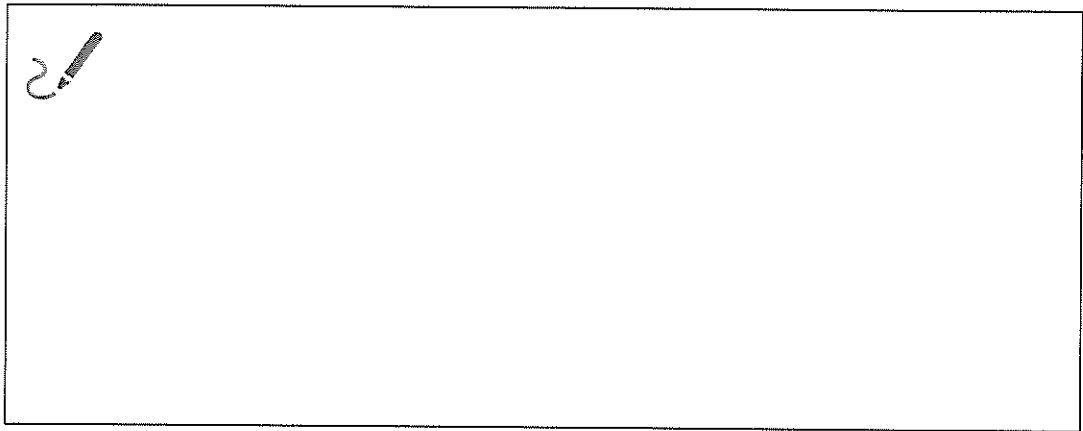


(四) 求解模型·检验与优化

在拟合曲线 $y=f(x)$ 中, 当 $x=x_i$ 时, 记 $\hat{y}_i=f(x_i)$.

[活动 5] 根据所建立的函数模型, 用 TI 图形计算器计算并讨论.

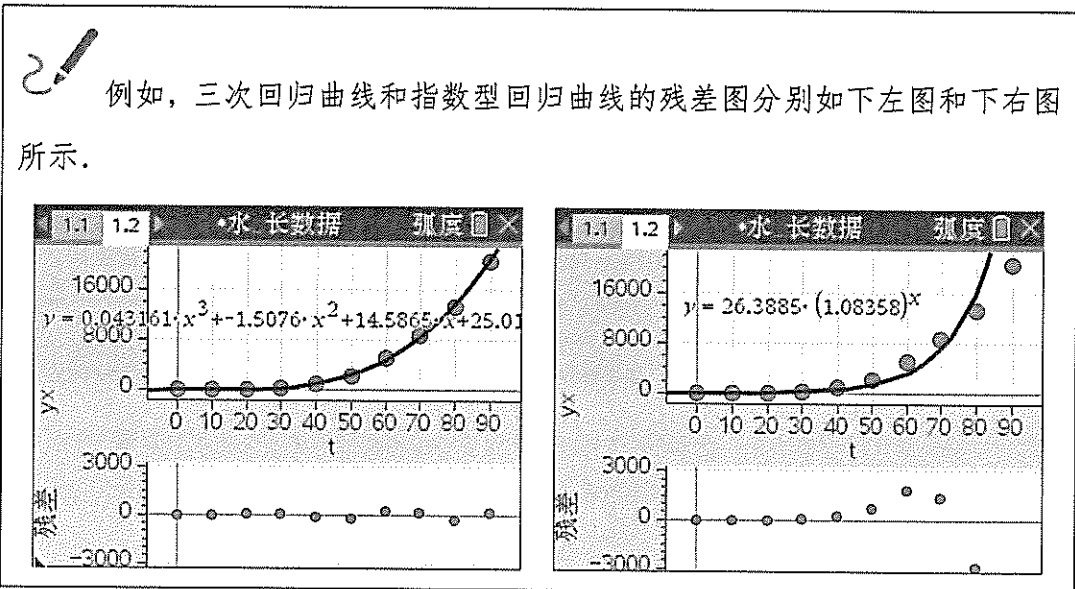
- (1) 当 t 分别为 70、80、90 时, 计算植物量 \hat{y}_{70} 、 \hat{y}_{80} 、 \hat{y}_{90} 的值;
- (2) 在云端备份的数据中, 实验员找到当 t 分别为 70、80、90 时, 水葫芦的实际植物量 $y_{70}=8620.32$ 、 $y_{80}=13298.84$ 、 $y_{90}=20713.92$, 计算实际值与模型估计值之间的差, 这些差产生的原因可能是什么?



在曲线 $y=f(x)$ 中, 当 $x=x_i$ 时, $\hat{y}_i=f(x_i)$, 将 $y_i-\hat{y}_i$, 即实际值与模型估计值之间的差称为残差, 残差直观地描述了数据与曲线的贴近度.

TI 图形计算器可以直接计算各组数据的残差并绘制残差图.

[活动 6] 在 TI 图形计算器中, 复原数据表, 重新绘制拟合曲线, 再画出曲线的残差图, 并比较哪种拟合曲线的拟合度更好.



使用 TI 图形计算器, 可以精准、快速地计算残差 (如表 2).

表 2 不同函数模型下的残差

t	实际值	三次回归		指数型回归	
		拟合值	残差	拟合值	残差
0	21.17	25.013	-3.843	26.389	-5.219
10	46.59	63.279	-16.689	58.888	-12.298
20	116.53	58.991	57.539	131.412	-14.882


30	301.94	271.115	30.825	293.254	8.686
40	878.01	958.617	-80.607	654.416	223.594
50	2166.43	2380.463	-214.033	1460.373	706.057
60	5085.05	4795.619	289.431	3258.919	1826.131
70	8620.32	8463.051	157.269	7272.493	1347.827
80	13298.84	13641.725	-342.885	16229.052	-2930.212
90	20713.92	20590.607	123.313	36216.206	-15502.286

观察表格可以看到，前期（0到30期间）指数型拟合曲线的残差的绝对值普遍更小，而中后期（40到90之间）三次拟合曲线的残差的绝对值明显小于指数型拟合曲线的残差的绝对值。

再次观察实际值，可以发现后期水葫芦的生长速度明显放缓了，这也是符合实际情况的。在实际环境中，水葫芦的生长会达到饱和，也就是说，没有足够的资源（空间、营养等）让水葫芦继续生长。

但是根据函数的基本性质可以知道，不论是三次曲线还是指数型曲线都始终保持“猛速增长”的趋势，这说明我们需要优化、调整模型，使模型更符合水葫芦实际的生长情况。

[活动7] 根据水葫芦的实际生长情况，画出其植物量随时间变化的大致曲线。以已有的函数模型为基础，如何写出曲线方程的一种可能形式？

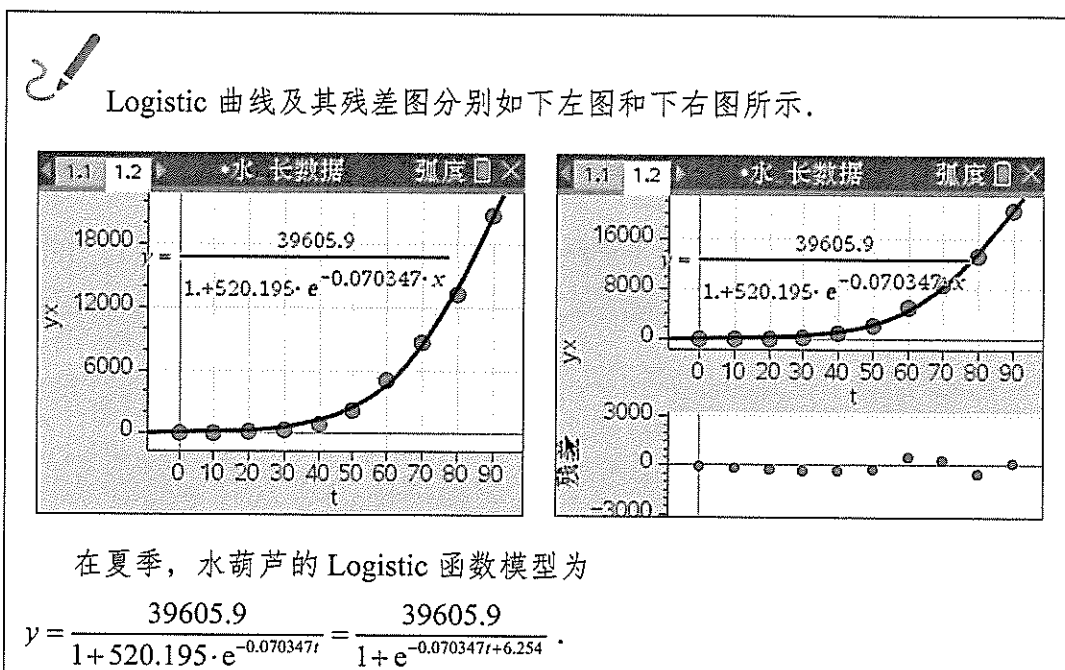


早在 1838 年至 1847 年间，数学生物学家韦吕勒 (P.F.Verhulst) 对指数增长模型进行了调整，提出了著名的逻辑斯蒂函数 (Logistic Function) 模型

$$y = \frac{A}{1 + e^{-kt+b}},$$

其中 A, k, b 为常数.

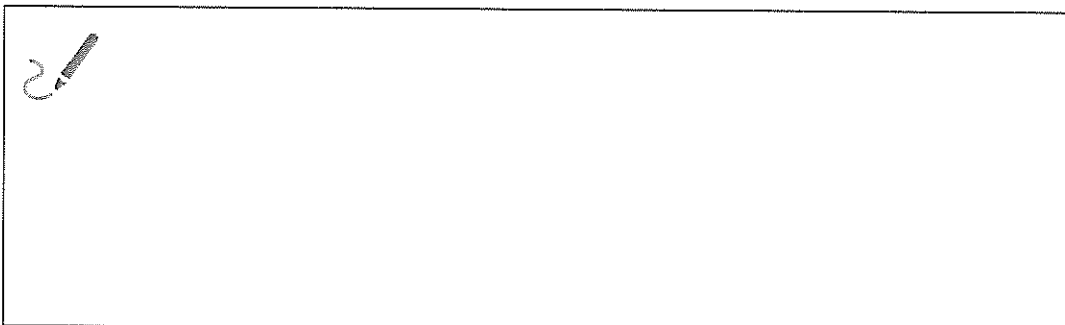
[活动 8] 在散点图中，画出 Logistic 曲线和它的残差图，写出拟合曲线的表达式.



观察这个函数的图像可知，当 t 取较小的非负整数时，函数值与 $\frac{39605.9}{e^{-0.070347t + 6.254}}$ 非常接近，从而与上述指数模型相近，这时接近指数增长.

而当 t 取较大的正整数时，函数值增长较慢，且当 t 趋向于正无穷大时， $e^{-0.070347t + 6.254}$ 无限趋近于 0，函数值无限趋近于 39605.9.

[活动 9] 根据 Logistic 函数，计算当时间 t 分别为 70、80、90 时植物量的值，比较实际值与模型估计值之间的差.



可以看到，Logistic 函数模型更能反映水葫芦的生长规律，其拟合效果比指数型函数拟合更好。这一模型对于刻画种群的生长更有一般性。

（五）实际结果·应用与展望

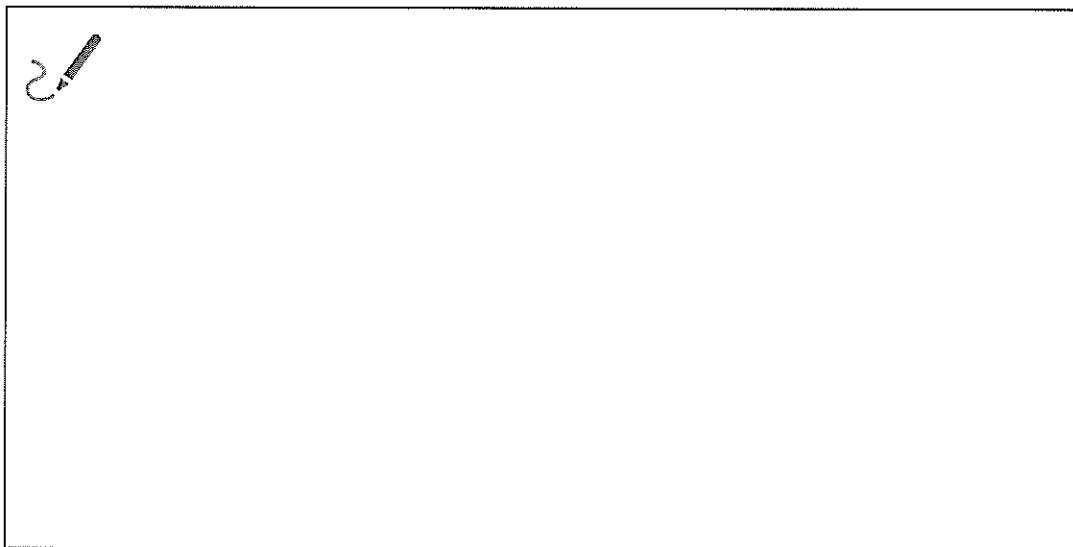
根据 Logistic 函数模型，我们能对水葫芦未来的生长趋势做出预测，这样就能更好地提出环境治理的方案，正如在视频中提到一些方法，AI 也为我们提供了一些方案。

水葫芦有哪些治理方法

④ 水葫芦 (*Eichhornia crassipes*) 是一种生长迅速且适应性强的水生植物。由于其繁殖能力强，容易造成水体堵塞、影响水质等问题。治理水葫芦的方法主要有以下几种：

1. 物理治理：
 - 人工打捞：利用人工或机械设备进行打捞和清理。这种方法适合面积较小或初期治理。
 - 机械割草：使用专门的割草船进行大面积清理，可以提高效率。
2. 生物治理：
 - 引入天敌：引入水葫芦的天敌，如水葫芦象甲 (*Neochetina eichhorniae*) 等昆虫，以控制其生长。
 - 生物竞争：种植其他水生植物，如水葱、菖蒲等，与水葫芦竞争资源，从而抑制水葫芦的繁殖。
3. 化学治理：
 - 除草剂：使用特定的水生植物除草剂，如 2,4-D 等，对水葫芦进行喷洒处理。这种方法需要谨慎使用，以避免对其他水生生物和水体环境造成不良影响。

[活动 10] 假设夏季时，水葫芦的植物量 y (单位：克) 与时间 t (单位：天) 的关系 $y = h(t)$ 满足 $h(t) = \frac{39606}{1 + e^{-0.07t + 6.25}}$ ，其中 t 为自然数。请通过小组讨论制定一种治理方案，过程中可以使用 TI 图形计算器。



如果对水葫芦的生长过程加以管理，在协调人力、物力的情况下，水葫芦的肆意生长能够得到有效控制。当然这也需要通过建立更为复杂的数学模型，引入更多的变量来进行计算和预测，各小组在课后可以进一步开展研究。

第三部分 小结

今天，我们选择一个身边的生态环境治理问题开展数学建模活动。

我们研究了夏季水葫芦的生长规律，选择了不同的函数模型来拟合实验数据，通过对拟合程度高低的比较，促使我们进一步优化、调整模型，以期找到一个更为科学准确的函数模型。用这些不同的函数模型，我们尝试为研究员推测复原被污染的数据。在 AI 的辅助下，同学们认识了一个全新的函数模型：逻辑斯蒂 Logistic 函数模型，这是一个广泛应用于生物、医学、经济等领域的函数模型。

在建立模型、求解模型的过程中，同学们使用了 TI 图形计算器来辅助研究，进一步熟悉了“绘制回归曲线”、“绘制残差图”、作图等功能。

通过学习，同学们再次经历了完整建模的过程。数学建模是运用数学解决实际问题的有效途径。建立数学模型的过程是层层深入的，我们通过考虑不同因素对研究对象的影响，不断优化调整和优化模型，希望寻找出与实际情况偏差更小的数学模型，这样才能有利于在后续进行预测和分析。当我们掌握了更多的数学知识，拥有多样的计算设备和软件辅助研究后，就能更便捷、更严谨地比较不同模型之间的区别，为科学研究提供有力支撑，从而为社会环境问题的治理等提供更多支持！

复旦大学数学系教授李大潜曾经说过，真正好的数学，是愈来愈深入、愈来愈简明、愈来愈有用的。

第四部分 作业

作业共分为三个部分，思考、成文、探索。

（一）思考

1. 类比指数型函数模型，三次多项式型函数能否通过函数的变换，使得它的图像也能很好地描述水葫芦的生长规律呢？

2. 是否还有其他的函数模型，也能较好地描述水葫芦的生长规律？

(二) 成文

以本节课的学习内容为基础, 撰写一篇结构完整的数学建模小论文.

(三) 探索

1. 设水葫芦的植物量为 y (单位: 克), 时间为 t (时间: 天), 计算 $\ln y$ 的值, 并在 TI 图形计算器中画出 $(t, \ln y)$ 的散点图. 观察散点图, 猜想 $\ln y$ 与 t 的关系, 并用恰当的曲线拟合这些点.

2. 假设在夏季, 每株水葫芦植物量 y (单位: 克) 与时间 t (时间: 天) 满足关系式 $L(t) = \frac{39605.9}{1 + e^{-0.070t + 6.254}}$, 其中 t 为自然数.

夏季开始时, 在一个湖中投放 300 株水葫芦, 若要使从第 51 天起每天水葫芦的生物量较前一天不再增加, 工作人员在从第 51 天开始的第 n ($n=1, 2, \dots, 40$) 天采用物理方法清理 a_n (克) 的水葫芦. 试根据 $L(t)$ 来确定 a_n 的最小值.

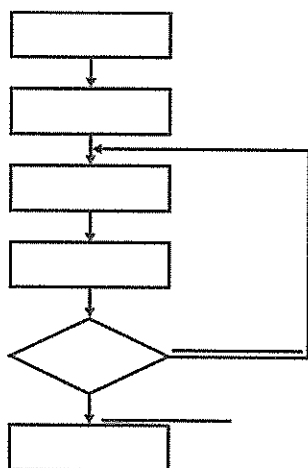
水葫芦的生长

(选择性必修第四册 主题4)

班级：_____ 姓名：_____ 学号：_____

第一部分 回顾

[回顾] 数学建模的基本过程有哪些？

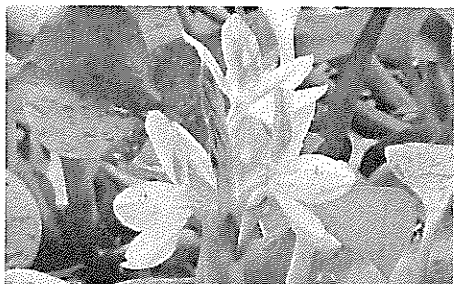


第二部分 知新

(一) 实际情境 · 背景与对象

水葫芦 (又名: 凤眼莲)

Eichhornia crassipes (Mart.) Solms



雨久花科凤眼莲属的浮水草本植物，因其中央具深蓝色块斑，蓝块斑中又有鲜黄色眼点，状似孔雀羽毛，故又名凤眼莲。

水葫芦原产于南美洲，现在广泛分布于中国长江、黄河流域及华南各地；在世界各地都有分布。它环境的适应性强，在池塘、水沟和低洼的渍水田均可生长，最喜气候温暖、阳光充足的环境，喜生于浅水、静水中。



水葫芦的种子能够长期存活，存活时间能达到5到20年左右，在13摄氏度以上的环境中开始生长，25摄氏度到32摄氏度的环境中生长的最快。研究显示，在适宜条件下，水葫芦每5天可生长1株新植株，依此速率，1株水葫芦1年之内可生长达到1.4亿株，足以铺满140公顷的水面。

不加以治理，水葫芦的肆意生长可能对环境、水上交通、饮水安全、渔业生产等造成不良影响，形成季节性的灾难。

(二) 提出问题 · 指标与因素

问题：水葫芦的生长能力究竟有多强？

[活动 1] 讨论关于“水葫芦的生长能力”的相关问题。

<p>(1) 如何描述“水葫芦的生长能力”？</p> 
<p>(2) 影响“水葫芦的生长能力”的因素有哪些？</p> 

(三) 建立模型 · 数据与模型

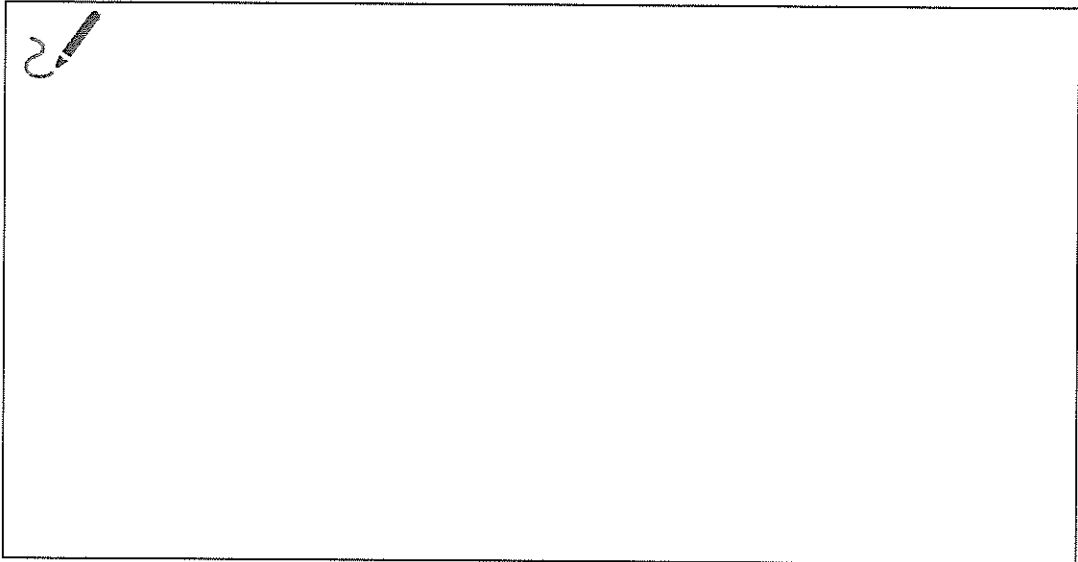
华南农业大学对水葫芦进行了研究，下表是水葫芦生态研究的实验数据，包括水葫芦在春季（3月上旬）、夏季（6月上旬）、秋季（9月上旬）三个季节植物量的部分数据。由于研究员的失误，夏季中有 3 个数据被污染难以辨别。

表¹ 水葫芦在春、夏、秋三个季节的植物量数据

调查相隔时段/天	春季	夏季	秋季
0	25.01	21.17	26.83
10	57.77	46.59	46.67
20	126.79	116.53	82.87
30	254.74	301.94	162.7
40	625.95	878.01	361.05
50	1578.94	2166.43	842.95
60	3621.85	5085.05	1866.37
70	6721.45	?	3972.83
80	10189.24	?	5644.10
90	15009.17	?	8778.56

¹ 表是来自华南农业大学有关水葫芦生态研究的实验数据，表中数据为 30 株水葫芦调查结果的平均值，其中调查时段 0 代表水葫芦接入时的初始值。数据源于华南农业大学冯耀荣（2003）的《水葫芦种群生态控制的基础研究》。

[活动 2] 根据表格中的数据, 分析并讨论表中的这些数据能反应或推理出哪些信息?



夏季时, 设水葫芦的植物量为 y (单位: g), 时间为 t (时间: 天), 相应的关系式为 $y = f(t)$, 其中 t 为自然数.



[活动 3] 在 TI 图形计算器中, 画出夏季水葫芦植物量 y 关于时间 t 的散点图.

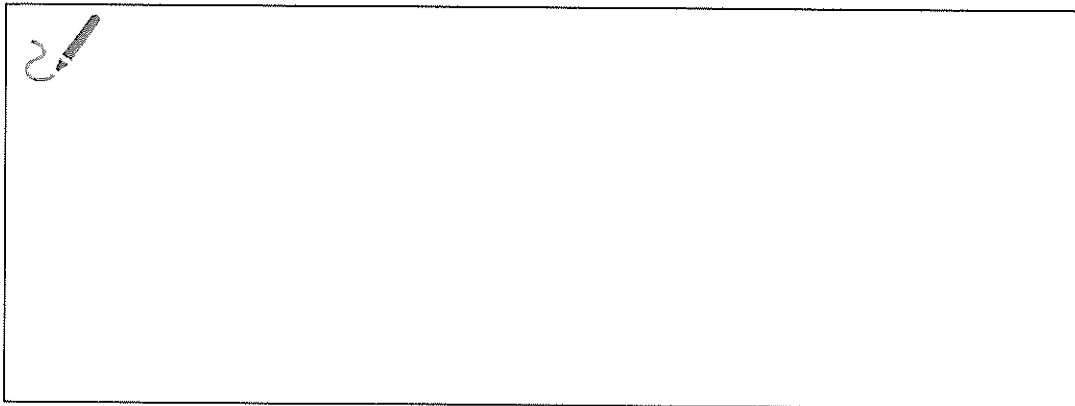
在平面直角坐标系中, 找一条曲线去“贴近”数据散点图中的各点 (x_i, y_i) ($i=1, 2, \dots, n$), 这样的曲线称为这组数据的一条拟合曲线, 记为 $y = f(x)$.



[活动 4] 观察散点图, 在 TI 图形计算器上操作并讨论.

(1) 猜想 y 与 t 之间的关系更符合线性、多项式、指数、对数中的哪种?


(2) 在散点图中添加拟合曲线, 并写出拟合曲线的方程.



(四) 求解模型 · 检验与优化

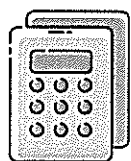
在拟合曲线 $y=f(x)$ 中, 当 $x=x_i$ 时, 记 $\hat{y}_i=f(x_i)$.

[活动 5] 根据所建立的函数模型, 用 TI 图形计算器计算并讨论.



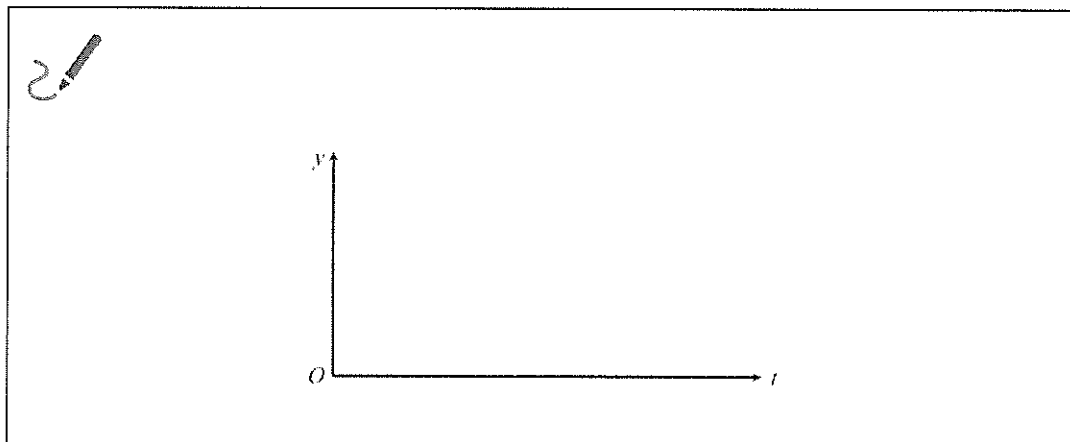
	i = 70	i = 80	i = 90
实际值 y_i			
模型估计值 \hat{y}_i			
误差 $y_i - \hat{y}_i$			

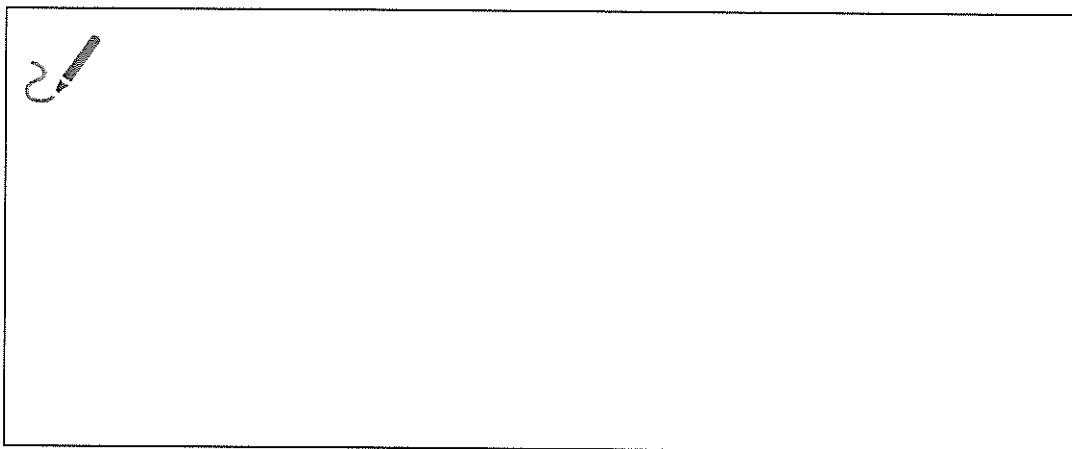
在曲线 $y=f(x)$ 中, 当 $x=x_i$ 时, $\hat{y}_i=f(x_i)$, 将 $y_i - \hat{y}_i$, 即实际值与模型估计值之间的差称为残差, 残差直观地描述了数据与曲线的贴近度.



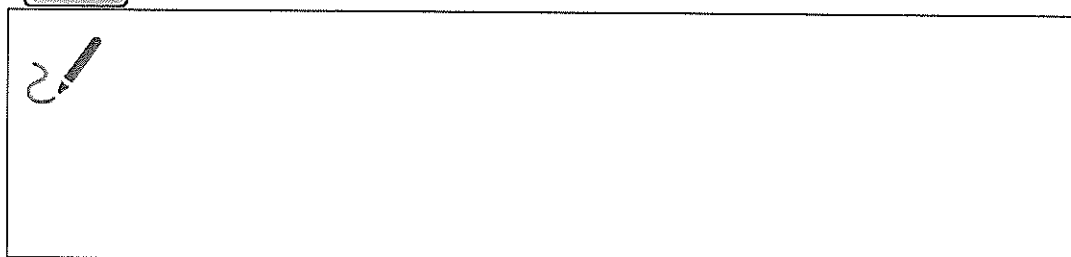
[活动 6] 在 TI 图形计算器中, 复原数据表, 重新绘制拟合曲线, 再画出曲线的残差图, 并比较哪种拟合曲线的拟合度更好.

[活动 7] 根据水葫芦的实际生长情况, 画出其植物量随时间变化的大致曲线. 然后, 以已有的函数模型为基础, 如何写出曲线方程的一种可能形式?





[活动 8] 在散点图中，画出 Logistic 曲线和它的残差图，写出拟合曲线的表达式。



[活动 9] 根据 Logistic 函数，计算当时间 t 分别为 70、80、90 时植物量的值，比较实际值与模型估计值之间的差。

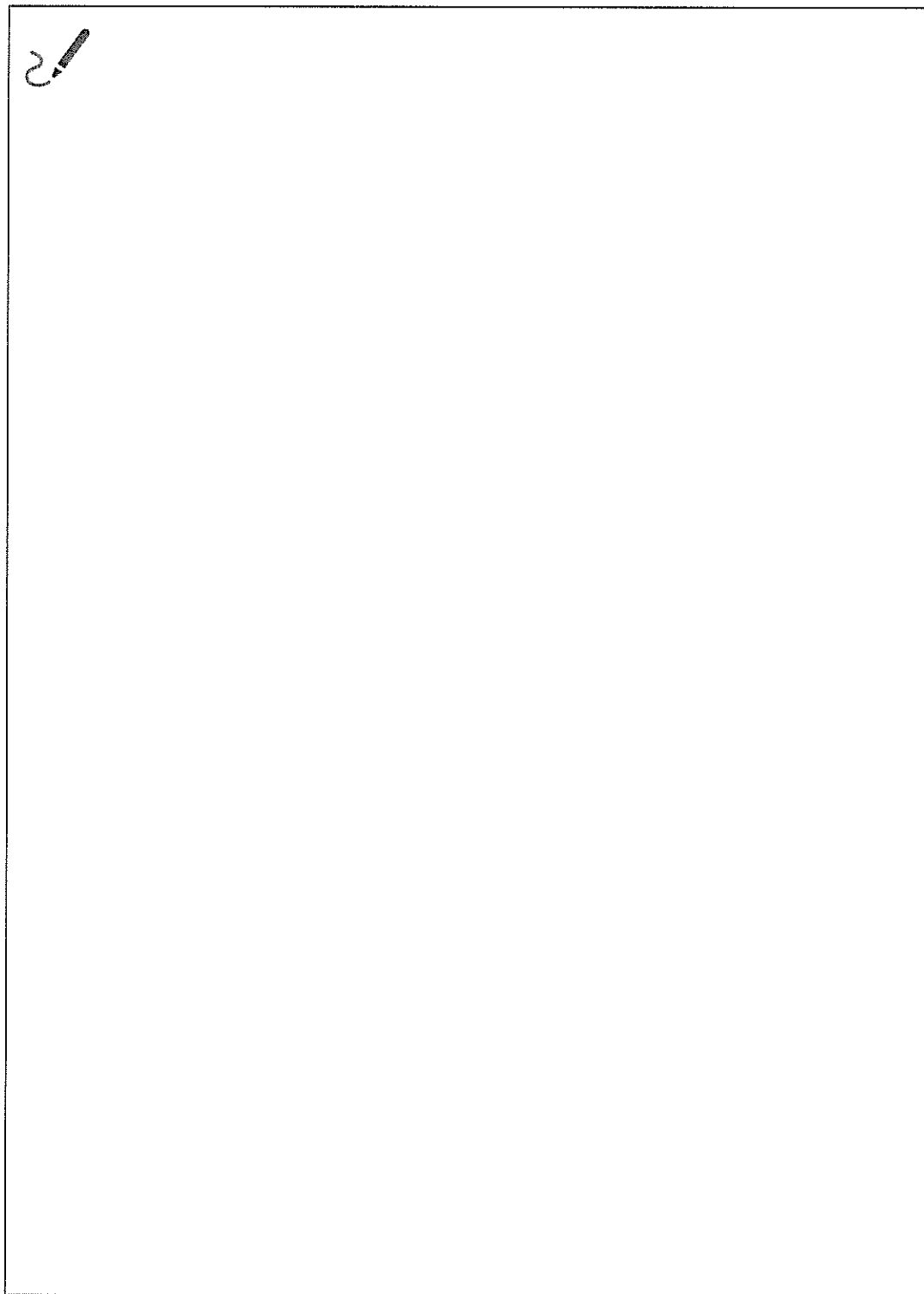
	$i = 70$	$i = 80$	$i = 90$
实际值 y_i			
模型估计值 \hat{y}_i			
误差 $y_i - \hat{y}_i$			

(五) 实际结果 · 应用与展望

[活动 10] 假设夏季时, 水葫芦的植物量 y (单位: 克) 与时间 t (单位: 天)

的关系 $y = h(t)$ 满足 $h(t) = \frac{39606}{1 + e^{-0.07t + 6.25}}$, 其中 t 为自然数. 请通过小组讨论制定一

种治理方案, 过程中可以使用 TI 图形计算器.



草稿纸

第三部分 小结

● 小结

环节	内容	完成	未完成
(一) 实际情境背景与对象	认识水葫芦.		
(二) 提出问题指标与因素	确定描述水葫芦生长速度的指标, 找到影响水葫芦生长的因素.		
(三) 建立模型数据与模型	分析表格数据.		
	用 TI 图形计算器画出散点图和拟合曲线.		
(四) 求解模型检验与优化	用 TI 图形计算器画出残差图.		
	根据实际情况, 调整函数模型.		
	认识 Logistic 函数模型, 用 TI 图形计算器画出 Logistic 回归曲线.		
(五) 实际结果应用与展望	基于 Logistic 函数模型, 对水葫芦未来生长的趋势进行预估.		

第四部分 作业

(一) 思考

1. 类比指数型函数模型, 三次多项式型函数能否通过函数的变换, 使得它的图像也能很好地描述水葫芦的生长规律呢?

2. 是否还有其他的函数模型, 也能较好地描述水葫芦的生长规律?

(二) 成文

以本节课的学习内容为基础, 撰写一篇结构完整的数学建模小论文.

(三) 探索

1. 设水葫芦的植物量为 y (单位: 克), 时间为 t (时间: 天), 计算 $\ln y$ 的值, 并在 TI 图形计算器中画出 $(t, \ln y)$ 的散点图. 观察散点图, 猜想 $\ln y$ 与 t 的关系, 并用恰当的曲线拟合这些点.

2. 假设在夏季, 每株水葫芦植物量 y (单位: 克) 与时间 t (时间: 天) 满足关系式 $L(t) = \frac{39605.9}{1 + e^{-0.070t + 6.254}}$, 其中 t 为自然数.

夏季开始时, 在一个湖中投放 300 株水葫芦, 若要使从第 51 天起每天水葫芦的生物量较前一天不再增加, 工作人员在从第 51 天开始的第 n ($n=1, 2, \dots, 40$) 天采用物理方法清理 a_n (克) 的水葫芦. 试根据 $L(t)$ 来确定 a_n 的最小值.

数学课例研究工作坊工作单

指向学习能动性发展的数学学习任务设计

——苏科版新教材八上《平面直角坐标系》为例

请从教师学习视角思考以下问题(即作为课程领导者视角如何促进教师课堂现场的专业学习力):

问题 1: 课例研究的标题有何特点?

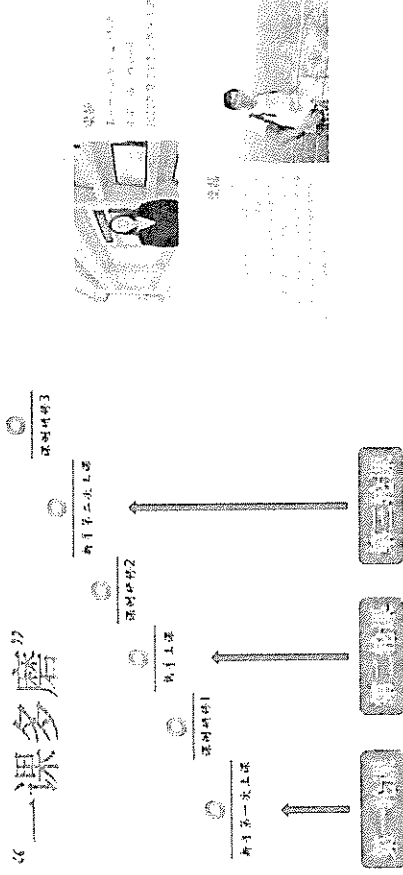
问题 2: 课例研究过程中用到了什么方法? 为何使用它?

问题 3: 课例研究结果呈现之后为何要有“研究启示”?

汇报纲要

- 背景与主题
- 过程与方法
- 结果呈现
- 研究启示

2 过程与方法 · 研究形式



2 过程与方法 · 前端分析

文献分析

- ◆ 关于“学习能动性”
 1. 学习能动性的内涵
 2. 学习能动性的重要性
 3. 学习能动性培养策略
- ◆ 关于“深度学习任务设计”
 1. 深度学习任务设计的重要性
 2. 深度学习任务设计的原则
 3. 深度学习任务设计的方法
 4. 深度学习任务设计的评价

现状分析

- ◆ 现状要求
 - 1. 明确学习目标
 - 2. 创设真实情境
 - 3. 提供合作机会
 - 4. 鼓励自主探究
- ◆ 内容选择
 - 1. 选择具有挑战性的内容
 - 2. 选择与生活实际相关的内容
 - 3. 选择能够激发学生兴趣的内容
- ◆ 发展学习能动性的抓手
 - 1. 用数学的眼光观察情境——确定位置的重要性
 - 2. 利用数学意识对刻画位置——提高方法的多维性
 - 3. 从数轴到坐标系——平面直角坐标系的合理性
 - 4. 点与坐标的对应——对应——映射几何的增值性

2 过程与方法 · 研究工具

课堂观察工具

- (1) 学习能动性分析框架

观察点	观察内容	观察方法
学习目标	明确、具体、可操作	课堂观察
情境创设	真实、生动、有挑战性	课堂观察
合作学习	小组合作、分工明确	课堂观察
自主探究	独立思考、勇于表达	课堂观察
评价反馈	及时、多元、激励性	课堂观察
- (2) 课堂观察记录表

观察时间	观察地点	观察对象	观察内容	观察结果
2024.6.13	XX小学	XX班	数学课	...

2 过程与方法 · 研究工具

▶ 半结构化访谈工具

(1) 学生访谈主题

访谈提纲

1. 请描述一下您在课堂上使用过的最有趣的教学活动。

2. 您认为什么样的教学情境最能激发学生的学习兴趣？

3. 在您的教学实践中，您是如何处理学生提出的开放性问题的？

4. 您认为在课堂管理中，如何平衡学生的自主性和纪律性？

5. 您能分享一个您认为成功的合作学习案例吗？

6. 您认为教师应该如何评估学生的深度学习？

7. 您认为在跨学科教学中，最大的挑战是什么？

8. 您认为教师应该如何培养学生的批判性思维？

9. 您认为在课堂评价中，如何体现过程性评价的重要性？

10. 您认为在课堂教学中，如何有效利用信息技术？

11. 您认为在课堂教学中，如何培养学生的沟通能力？

12. 您认为在课堂教学中，如何培养学生的团队合作能力？

13. 您认为在课堂教学中，如何培养学生的创新能力？

14. 您认为在课堂教学中，如何培养学生的解决问题的能力？

15. 您认为在课堂教学中，如何培养学生的自主学习意识？

16. 您认为在课堂教学中，如何培养学生的社会责任感？

17. 您认为在课堂教学中，如何培养学生的公民意识？

18. 您认为在课堂教学中，如何培养学生的国际视野？

19. 您认为在课堂教学中，如何培养学生的终身学习能力？

20. 您认为在课堂教学中，如何培养学生的健康生活方式？

(2) 教师访谈主题

访谈提纲

1. 您认为在课堂教学中，如何有效利用信息技术？

2. 您认为在课堂教学中，如何培养学生的沟通能力？

3. 您认为在课堂教学中，如何培养学生的团队合作能力？

4. 您认为在课堂教学中，如何培养学生的创新能力？

5. 您认为在课堂教学中，如何培养学生的解决问题的能力？

6. 您认为在课堂教学中，如何培养学生的自主学习意识？

7. 您认为在课堂教学中，如何培养学生的社会责任感？

8. 您认为在课堂教学中，如何培养学生的公民意识？

9. 您认为在课堂教学中，如何培养学生的国际视野？

10. 您认为在课堂教学中，如何培养学生的终身学习能力？

11. 您认为在课堂教学中，如何培养学生的健康生活方式？

12. 您认为在课堂教学中，如何培养学生的批判性思维？

13. 您认为在课堂教学中，如何培养学生的沟通能力？

14. 您认为在课堂教学中，如何培养学生的团队合作能力？

15. 您认为在课堂教学中，如何培养学生的创新能力？

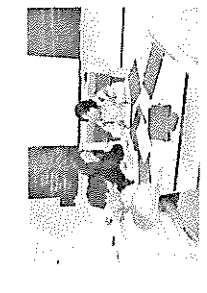
16. 您认为在课堂教学中，如何培养学生的解决问题的能力？

17. 您认为在课堂教学中，如何培养学生的自主学习意识？

18. 您认为在课堂教学中，如何培养学生的社会责任感？

19. 您认为在课堂教学中，如何培养学生的公民意识？

20. 您认为在课堂教学中，如何培养学生的国际视野？



2 过程与方法 · 研究工具

▶ 前后测工具

(1) 前测

访谈提纲

1. 请描述一下您在课堂上使用过的最有趣的教学活动。

2. 您认为什么样的教学情境最能激发学生的学习兴趣？

3. 在您的教学实践中，您是如何处理学生提出的开放性问题的？

4. 您认为在课堂管理中，如何平衡学生的自主性和纪律性？

5. 您能分享一个您认为成功的合作学习案例吗？

6. 您认为教师应该如何评估学生的深度学习？

7. 您认为在跨学科教学中，最大的挑战是什么？

8. 您认为教师应该如何培养学生的批判性思维？

9. 您认为在课堂评价中，如何体现过程性评价的重要性？

10. 您认为在课堂教学中，如何有效利用信息技术？

11. 您认为在课堂教学中，如何培养学生的沟通能力？

12. 您认为在课堂教学中，如何培养学生的团队合作能力？

13. 您认为在课堂教学中，如何培养学生的创新能力？

14. 您认为在课堂教学中，如何培养学生的解决问题的能力？

15. 您认为在课堂教学中，如何培养学生的自主学习意识？

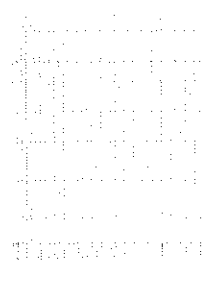
16. 您认为在课堂教学中，如何培养学生的社会责任感？

17. 您认为在课堂教学中，如何培养学生的公民意识？

18. 您认为在课堂教学中，如何培养学生的国际视野？

19. 您认为在课堂教学中，如何培养学生的终身学习能力？

20. 您认为在课堂教学中，如何培养学生的健康生活方式？



2 过程与方法 · 研究工具

▶ 关于学习能动性

1. 六个表现方面:

学习意愿的激发、学习目标的定向、学习路径的构建、学习成果的完成、学习资源的取用、学习过程的调控。

2. 四个发展标志:

目标感、获得感、效能感、认同感。

3. 三种分类角度:

被动——主动
操作——思维
自主——合作

▶ 关于发展学习能动性的任务

1. 设计的六个特点:

情境朴、入口宽、空间广、思路多、蕴含深、可迁移。

2. 教学的四个注重:

问题的探究性、引导的包容性、互动的多样性、语言的激励性。

3. 发展的三种理念:

任务的设计与教学同等重要、经验的转化与情感的流动缺一不可、教师应当提升自己的专业能动性。

2 过程与方法 · 人员分工与日程安排

▶ 人员分工

1. 资料收集与整理: 杨玉东、王丹、王红兵
 2. 访谈提纲设计与实施: 杨玉东、王红兵、王丹丹、王丹丹
 3. 问卷设计与实施: 王丹丹、王丹丹、王丹丹
 4. 数据整理与分析: 王丹丹、王丹丹、王丹丹
 5. 报告撰写: 王丹丹、王丹丹、王丹丹
- 教师与教育心理学研究所合作完成

▶ 日程安排

日期	时间	地点	内容
2023年11月23日	上午 9:00-12:00	教师与教育心理学研究所	项目启动会议
2023年11月24日	上午 9:00-12:00	教师与教育心理学研究所	资料收集与整理
2023年11月25日	上午 9:00-12:00	教师与教育心理学研究所	访谈提纲设计与实施
2023年11月26日	上午 9:00-12:00	教师与教育心理学研究所	问卷设计与实施
2023年11月27日	上午 9:00-12:00	教师与教育心理学研究所	数据整理与分析
2023年11月28日	上午 9:00-12:00	教师与教育心理学研究所	报告撰写
2023年11月29日	上午 9:00-12:00	教师与教育心理学研究所	项目总结会议

